Carmichael

Der Operationscalcul

oder

die Methode der Trennung der Operations- und Quantitätssymbole.

Ein Erleichterungsmittel der Operationen

der

Differential- Integral- Differenzen- und Summenrechnung.

Von

R. Carmichael,

Fellow am Trinity College zu Dublin, etc.

Deutsch herausgegeben

von

Dr. C. H. Schnuse.

Braunschweig.

Verlag der Hofbuchhandlung von Eduard Leibrock.

1857.

Vorwort.

Der Mangel eines Lehrbuches des Operationscalculs oder der Methode der Trennung der Operations- und Quantitätssymbole ist von den Mathematikern längst gefühlt worden. — Nicht blos dem Anfänger ist der Operationscalcul ein wesentliches Erleichterungs- und Abkürzungsmittel der Processe der Differential-Integral-Differenzen- und Summenrechnung, sondern auch für den geübtern Mathematiker ist diese Methode ein kräftiges Hülfsmittel, nicht nur bekannte Resultate mit Leichtigkeit und Eleganz wieder zu finden, sondern auch neue Wahrheiten mit Sicherheit und Schnelligkeit zu erhalten. —

Es ist der Zweck dieses Werkchens: den Operationscalcul in seinen Elementen nach dem neusten Standpunkte und in der einfachsten Form darzustellen — so daß dasselbe als ein nothwendiges Supplement zu allen deutschen Werken über Differential- und Integralrechnung betrachtet werden kann. —

Schon Lagrange hat die sehr treffende Bemerkung gemacht: „A mesure que l'Analyse s'étend et s'enrichit de nouvelles méthodes, elle devient plus compliquée, et l'on ne peut la simplifier qu'en généralisant et en réduisant, tout à la fois, les méthodes qui peuvent être susceptibles de ces avantages. —“

Es darf deshalb wohl angenommen werden: daß die hier vorliegende deutsche Ausgabe, welche kaum ein Drittheil des Originalpreises kostet, dem deutschen mathematischen Publikum nicht unwillkommen sein wird, da ein ähnliches Werk in der deutschen mathematischen Literatur bis jetzt noch nicht existirt. —

Dr. S.

Erstes Kapitel.

Einleitung.

1. Der Operationscalcul, im weitesten Sinne des Wortes, ist die Wissenschaft, welche von den Verbindungen, die nach gewissen Gesetzen mit Operationssymbolen vorgenommen werden, so wie von den Relationen handelt, durch welche diese Symbole mit den Subjecten, woran diese Operationen vorgenommen werden, verbunden sind. —

Der Hauptzweck des Operationscalculs in dem vorliegenden Werkchen ist: die Anwendung desselben besonders als ein Erleichterungs- und Vereinfachungsmittel der Processe der Differential- Integral- Differenzen- und Summenrechnung einfach und methodisch darzustellen — es werden aber auch verschiedene andere Anwendungen desselben, auf Geometrie, ꝛc. gegeben werden. — Zunächst müssen natürlich die Fundamentalsätze des Operationscalculs erörtert werden.

I. Zwei Symbole Φ und Ψ heißen „commutativ", wenn, indem u das Operationssubject bedeutet, die Gleichung:

$$\Phi\Psi . u = \Psi\Phi . u$$

stattfindet.

II. Ein Symbol Φ wird „distributiv" genannt, wenn die Gleichheit:

$$\Phi (u + v) = \Phi . u + \Phi . v$$

stattfindet, wo u und v zwei verschiedene Operationssubjecte sind. —

III. Ein Symbol heißt „iterativ" — oder folgt dem Indergesetz, wenn die Gleichung:

$$\Phi^m . \Phi^n . u = \Phi^{m+n} . u = \Phi^n . \Phi^m . u$$

stattfindet. —

Dieses sind die drei Hauptgesetze des Operationscalculs — und werden resp. das Gesetz der Commutation — der Distribution und der Indices genannt. —

2. Jedes Theorem, welches für irgend ein, diesen Gesetzen genügendes Symbol stattfindet, gilt auch für jedes andere Symbol, welches denselben Gesetzen Genüge leistet. —

Die Zahlensymbole genügen denselben aber; denn alle algebraische Gleichungen können als dasselbe Subject — die Einheit — habend, und constante Größen als Summen an der Einheit vollzogener Operationen betrachtet werden. — Auch die Differentiationssymbole genügen den fraglichen Gesetzen; denn wenn u eine Fuction der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y ist, so ist bekanntlich:

$$D_x D_y . u = D_y D_x . u.$$

Sind dagegen u, v Functiouen von x allein, so ist:

$$D_x (u + v) = D_x u + D_x v;$$

nnd:

$$D_x^m . D_x^n . u = D_x^{m+n} . u.$$

Hieraus fließt also die wichtige Folgerung: daß jedem von den in Rede stehenden Gesetzen abhängigen Theoreme in der Algebra ein analoges Theorem in der Differentialrechnung entspricht. — *)

---

*) Wenn Φ, Ψ Zahlen bedeuten, so finden die obigen drei Fundamentalgesetze offenbar statt; aber wenn z. B. Φ=log und Ψ=sin gesetzt würde, so fände das Commutationsgesetz nicht statt, weil log (sin u) nicht = sin (log u) ist — und für Φ = log, oder = sin fände das Distributivgesetz auch nicht statt, weil log (u+v) nicht = log u + log v ist, sowie sin (u + v) nicht = sin u + sin v ist. —

Hat man z. B. eine lineare Differentialgleichung mit constanten Coefficienten von der Form:

$$\Phi^n . u + A_1 \Phi^{n-1} . u + A_2 \Phi^{n-2} . u + \ldots + A_n u = X,$$

wo sich das Operationssymbol Φ nur auf u bezieht, und folglich mit $A_1, A_2, \ldots A_n$ commutativ ist; so ist die symbolische Auflösung dieser Gleichung:

$$u = \begin{cases} (\Phi^n + A_1 \Phi^{n-1} + A_2 \Phi^{n-2} + \ldots + A_n)^{-1} . X \\ + \\ (\Phi^n + A_1 \Phi^{n-1} + A_2 \Phi^{n-2} + \ldots + A_n)^{-1} . 0, \end{cases}$$

oder:

$$u = \begin{cases} N_1 (\Phi - a_1)^{-1} . X + N_2 (\Phi - a_2)^{-1} . X + \ldots + N_n (\Phi - a_n)^{-1} . X \\ + \\ N_1 (\Phi - a_1)^{-1} . 0 + N_2 (\Phi - a_2)^{-1} . 0 + \ldots + N_n (\Phi + a_n)^{-1} . 0, \end{cases}$$

wo $N_1, N_2, \ldots a_1, a_2, \ldots$ dieselbe Bedeutung haben, wie bei der Zerlegung einer rationalen gebrochenen Function:

$$\frac{1}{\xi^n + A_1 \xi^{n-1} + A_2 \xi^{n-2} + \ldots + A_n}$$

Wenn Φ und Ψ resp. Potenzirungen von den Graden n und m bedeuten, so ist offenbar $\Phi \Psi . u = (u^n)^m = (u^m)^n = \Psi \Phi . u$; d. h. das Commutationsgesetz findet statt; aber das Distributivgesetz nicht, weil $(u+v)^n$ nicht $= u^n + v^n$ ist. — u. s. f.

Wenn Φ und Ψ Zahlen sind, so ist $(\Phi + \Psi)^n . u = \Phi^n . u + \frac{n}{1} \Phi^{n-1} \Psi . u + \frac{n(n-1)}{1 . 2} \Phi^{n-2} \Psi^2 . u + \ldots$, und da der Grund des Stattfindens des binomischen Satzes lediglich in dem Stattfinden des Commutationsgesetzes liegt — so schließt man: daß die letzte Gleichung auch noch stattfindet, wenn Φ und Ψ nicht mehr Zahlen, sondern irgend welche Operationssymbole bedeuten, welche dem Commutationsgesetze genügen, wie z. B. die Symbole D_x, D_y, ... und man erhält so auf der Stelle die Formeln in Zusatz 1. —

Umgekehrt kann ein Operationssymbol als ein Größensymbol betrachtet werden, wenn beide denselben Gesetzen genügen — wie in Zusatz 2 — und ähnlich verhält es sich in andern Fällen. —

in Partialbrüche. — Die Werthbestimmung der symbolischen Auflösung ist mithin von der besondern Form von Φ abhängig. — Die erste Gliederreihe dieser Auflösung ist in allen Fällen völlig bestimmt, während die zweite Gliederreihe den willkürlichen Theil der Auflösung bildet, wie man später sehen wird. — Auch wird man bald sehen, daß in manchen Fällen der Werth des ersten Theiles ohne Zerlegung des symbolischen Operators in Factoren erhalten werden kann. — *)

---

*) Wenn nämlich $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ die Wurzeln der Gleichung:

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

sind, so ist der erste Theil dieser Gleichung bekanntlich gleich:

$$(x - a_1)(z - a_2) \ldots (x - a_n).$$

Hieraus erhellet, daß:

$$D^n u + A_1 D^{n-1} u + A_2 D^{n-2} u + \ldots + A_n u$$
$$= (D^n + A_1 D^{n-1} + A_2 D^{n-2} + \ldots + A_n) u$$
$$= (D - a_1)(D - a_2)(D - a_3) \ldots (D - a_n) u$$

ist. — Ferner hat man nach der bekannten Theorie der Zerlegung gebrochener Functionen in Partialbrüche:

$$(x_n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots A_n)^{-1}$$
$$= \frac{1}{x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n}$$
$$= \frac{N_1}{x - a_1} + \frac{N_2}{x - a_2} + \frac{N_3}{x - a_3} + \ldots + \frac{N_n}{x - a_n},$$

wo:

$$N_1 = \frac{1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_n)} = \frac{1}{f'(a_1)},$$

$$N_2 = \frac{1}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \ldots (a_2 - a_n)} = \frac{1}{f'(a_2)},$$

etc. etc.

ist. — Es ist mithin:

$$(D^n + A_1 D^{n-1} + A_2 D^{n-2} + \ldots + A_n)^{-1} X$$
$$= N_1 (D - a_1)^{-1} X + N_2 (D - a_2)^{-1} X + \ldots + N_n (D - a_n)^{-1} X,$$

wo D statt Φ gesetzt ist. —

3. Wenn ein Symbol Φ distributiv ist, so ist jede positive, oder negative Potenz desselben auch distributiv. — Denn zunächst hat man:

$$\Phi \,.\, (u+v) = \Phi \,.\, u + \Phi \,.\, v,$$

Operirt man nochmals mit Φ, so erhält man:

$$\Phi^2 \,.\, (u+v) = \Phi \,.\, (\Phi \,.\, u + \Phi \,.\, v) = \Phi^2 \,.\, u + \Phi^2 \,.\, v;$$

und allgemein:

$$\Phi^n \,.\, (u+v) = \Phi^n \,.\, u + \Phi^n \,.\, v.$$

Wenn man als Definition setzt:

$$\Phi^{-1} \,.\, \Phi \,.\, u = \Phi \,.\, \Phi^{-1} \,.\, u = u,$$

so ergiebt sich aus:

$$\Phi \,.\, (u+v) = \Phi \,.\, u + \Phi \,.\, v$$

wenn auf beiden Seiten mit Φ^{-1} operirt wird:

$$u + v = \Phi^{-1} \,.\, (\Phi \,.\, u + \Phi \,.\, v).$$

Die linke Seite dieser letzten Gleichheit kann aber auf die Form:

$$\Phi^{-1} \,.\, \Phi \,.\, u + \Phi^{-1} \,.\, \Phi \,.\, v,$$

und mithin die Gleichheit selbst auf die Form:

$$\Phi^{-1} \,.\, \Phi \,.\, u + \Phi^{-1} \,.\, \Phi \,.\, v = \Phi^{-1} \,.\, (\Phi \,.\, u + \Phi \,.\, v),$$

oder:

$$\Phi^{-1} \,.\, U + \Phi^{-1} \,.\, V = \Phi^{-1} \,.\, (U + V),$$

gebracht werden. Durch wiederholte Anwendung dieser Operation erhält man also allgemein:

$$\Phi^{-n} \,.\, U + \Phi^{-n} \,.\, V = \Phi^{-n} \,.\, (U + V).$$

4. Wenn man auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\Phi \,.\, (u+v) = \Phi \,.\, u + \Phi \,.\, v$$

mit Φ^{-1} operirt, und inverse Operationssymbole ihrer Natur nach als unbestimmt betrachtet; so muß das Resultat durch:

$$u + v = \Phi^{-1} \{\Phi \,.\, u + \Phi \,.\, v\} + \Phi^{-1} \,.\, 0,$$

und nicht bloß durch:

$$u + v = \Phi^{-1}\{\Phi . u + \Phi . v\},$$

ausgedrückt werden. —

Wenn aber die linke Seite einer Gleichung bestimmt ist, wie in der vorhergehenden vorausgesetzt wurde; so muß auch die rechte Seite derselben bestimmt sein — und darf mithin kein Glied wie $\Phi^{-1} . 0$ enthalten. — Anders verhält sich die Sache offenbar bei der Auflösung von Differential- oder Differenzengleichungen, worin die der linken Seite der obigen Gleichheiten entsprechende abhängige Veränderliche unbestimmt ist. —

5. Jede algebraische Function eines distributiven Symboles Φ ist auch distributiv. — Denn wenn man die Gleichheiten:

$$\Phi . (u + v) = \Phi . u + \Phi . v,$$
$$\Phi^2 . (u + v) = \Phi^2 . u + \Phi^2 . v,$$
$$\Phi^3 . (u + v) = \Phi^3 . u + \Phi^3 . v,$$
$$\&c.$$
$$\Phi^n . (u + v) = \Phi^n . u + \Phi^n . v,$$

resp. mit $A_1, A_2, A_3, \ldots$ multiplicirt, und die Producte addirt; so erhält man:

$$(A_0 + A_1\Phi + A_2\Phi^2 + \ldots + A_n\Phi^n)(u+v) = \begin{cases} (A_0 + A_1\Phi + A_2\Phi^2 + \ldots)u \\ \qquad + \\ (A_0 + A_1\Phi + A_2\Phi^2 + \ldots)v \end{cases}$$

oder allgemein, wenn F irgend eine algebraische Function bedeutet:

$$F(\Phi) . (u + v) = F(\Phi) . u + F(\Phi) . v.$$

Wir haben bei diesem Beweise die Indices positiv angenommen; allein man sieht leicht ein, daß derselbe auch für negative Indices gültig bleibt — und man also auch hat:

$$\frac{1}{F(\Phi)} . (u + v) = \frac{1}{F(\Phi)} . u + \frac{1}{F(\Phi)} . v.$$

6. Jede zwei Functionen desselben distributiven Sym-

boles sind commutativ — und wenn an irgend einer Größe mit zwei Functionen desselben Symboles successive operirt wird; so ist das Resultat dasselbe, als wenn gleich ursprünglich mit dem Producte dieser beiden Functionen operirt wird. —

Dieser Satz läßt sich durch Betrachtungen a priori beweisen; allein der Anfänger wird die Wahrheit desselben leichter und deutlicher an Beispielen einsehen. — So ist z. B. das Resultat der Operation:

$$(D_x + a) . (D_x + b) . F(x)$$

offenbar dasselbe als das der Operation:

$$(D_x + b) . (D_x + a) . F(x),$$

und jedes von beiden ist dasselbe, als das der Operation:

$$(D_x^2 + \overline{a + b}\, D_x + ab) . F(x).$$

7. Zum Stattfinden der Gleichheit:

$$e^{\Phi + \Psi} . u = e^{\Phi} . e^{\Psi} . u$$

ist erforderlich und hinreichend, daß Φ und Ψ commutativ sind. —

Denn aus der Entwickelung beider Theile der Gleichheit:

$$\left\{1 + \frac{(\Phi+\Psi)}{1} + \frac{(\Phi+\Psi)^2}{1.2} + ..\right\} u = \left(1 + \frac{\Phi}{1} + \frac{\Phi^2}{1.2} + ..\right)\left(1 + \frac{\Psi}{1} + \frac{\Psi^2}{1.2} + ..\right) u$$

erhellet, daß, wenn diese Gleichheit stattfinden soll, sein muß:

$$(\Phi + \Psi)^2 = \Phi^2 + 2\Phi\Psi + \Psi^2.$$

Aber der Werth der linken Seite der letzten Gleichheit ist im Allgemeinen:

$$\Phi^2 + \Phi\,\Psi + \Psi\,\Phi + \Psi^2;$$

und mithin kann diese Gleichheit nur stattfinden, wenn

$$\Phi\,\Psi = \Psi\,\Phi;$$

ist, d. h. wenn Φ und Ψ commutativ sind. — Wenn aber diese

Symbole commutativ sind, so ist unmittelbar einleuchtend, daß die allgemeine Gleichheit stattfindet. —

Dagegen sind die Symbole:

$$x D_y - y D_x, \qquad a D_x + b D_y,$$

nicht commutativ, und folglich ist weder:

$$e^{xD_y - yD_x \mp aD_x + bD_y} . F(x, y) = e^{xD_y - yD_x} . e^{aD_x + bD_y} . F(x, y),$$

noch:

$$e^{xD_y - yD_x} . e^{aD_x + bD_y} . F(x, y) = e^{aD_x + bD_y} . e^{zD_y - yD_x} . F(x, y).$$

eine Gleichheit. —

Von diesem Beispiele wird später eine wichtige Anwendung gemacht werden. —

Zweites Kapitel.

Anwendung des Vorhergehenden auf die Integration totaler linearer Differenzialgleichungen.

I. Allgemeine Lehrsätze.

1. Wenn man mit dem Symbol $x D_x$ an x^m operirt, so erhält man:

$$x D_x . x^m = m . x^m.$$

und wenn man auf beiden Seiten dieser letzten Gleichheit mit demselben Symbole operirt:

$$(x D_x)^2 . x^m = m^2 . x^m,$$

folglich allgemein:

$$(x D_x)^p . x^m = m^p . x^m.$$

Man hat also, wenn F irgend eine algebraische Function bedeutet:

$$F(x D_x) . x^m = F(m) . x^m.$$

Wegen künftiger Anwendungen und leichterer Indentificirung mit einer später abzuleitenden Gleichheit, wollen wir die letzte Gleichheit in der etwas veränderten Form:

$$F(x D_x) . A_m x^m = F(m) . A_m x^m$$

ausdrücken, wo A_n irgend eine Constante bedeutet. —

Obgleich das vorhergehende Theorem nur für positive Potenzen und directe Functionen bewiesen ist, so ist doch einleuchtend: daß es auch für negative Potenzen und inverse Functionen gilt. — Und es ist überhaupt zu bemerken: daß inverse Functionen, sowohl als directe, distributiv sind. —

2. Wenn U irgend eine algebraische Function von x bedeutet, so kann dieselbe im Allgemeinen auf die Form:

$$U = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n,$$

gebracht werden — und da $F(xD_x)$ distributiv ist; so hat man das allgemeinere Theorem:

$$F(xD_x)\, U = F(0) A_0 + F(1) A_1 x + F(2) A_2 x^2 + \ldots + F(n) A_n x^n,$$

sowie das entsprechende Theorem für inverse Functionen:

$$\frac{1}{F(xD_x)} U = \frac{1}{F(0)} A_0 + \frac{1}{F(1)} A_1 x + \frac{1}{F(2)} A_2 x^2 + \ldots + \frac{1}{F(n)} A_n x^n.$$

Beispiele. — 1. Wenn an U successive mit a^{nD_x} und $\frac{1}{a^{nD_x}}$ operirt wird, so erhält man resp:

$$A_0 + a A_1 x + a^2 A_2 x^2 + \ldots + a^n A^n_- x^n,$$

und:

$$A_0 + \frac{1}{a} A x + \frac{1}{a^2} A_2 x^2 + \ldots + \frac{1}{a^n} A_n x^n.$$

2. Wenn successive an $e^{A_n x^n}$ mit $F(xD_x)$ und $\frac{1}{F(xD_x)}$ operirt wird, so ergibt sich durch Entwickelung des Operationssubjectes:

$$F(0) 1 + F(n) \frac{A_n x^n}{1} + F(2n) \frac{(A_n x^n)^2}{1.2} + F(3n) \frac{(A_n x^n)^3}{1.2.3} + \&c.$$

und:

$$\frac{1}{F(0)} 1 + \frac{1}{F(n)} \frac{A_n x^n}{1} + \frac{1}{F(2n)} \frac{(A_n x^n)^2}{1.2} + \frac{1}{F(3n)} \frac{(A_n x^n)^3}{1.2.3} + \&c.$$

3. Es ist leicht zu zeigen, daß man für ein beliebiges Operationssubject u hat:

$$x D_x (x D_x - 1) . u = x^2 D_x^2 . u,$$

$$x D_x (x D_x - 1)(x D_x - 2) . u = x^3 D_x^3 . u,$$

&c.

und allgemein:

$$x D_x (x D_x - 1)(x D_x - 2) \ldots (x D_x - n + 1) . u = x^n D_x^n . u.$$

Hieraus erhellet, daß man hat:

$$xD_x(xD_x-1)..(xD_x-n+1).x^m=m(m-1)..(m-n+1).x^m,$$

und mithin:

$$xD_x(xD_x-1)..(xD_x-n+1).x^n=1.2.3...n.x^n,$$

welche Resultate sich auch unmittelbar aus dem Theoreme:

$$F(xD_x).x^m=F(m).x^m$$

ergeben. —

4. Wenn man mit dem Symbole xD_x an $x^m v$ operirt, so ergiebt sich:

$$xD_x.x^m v=x^m.(xD_x+m)v.$$

Operirt man auf beiden Seiten dieser letzten Gleichheit mit demselben Symbole, so erhält man:

$$(xD_x)^2.x^m v=x^m.(xD_x+m)^2 v,$$

und mithin allgemein:

$$(xD_x)^p.x^m v=x^m.(xD_x+m)^p v.$$

Bedeutet F wieder irgend eine algebraische Function, so hat man folglich das Theorem:

$$F(xD_x).x^m v=x^m F(xD_x+m)v.$$

welches offenbar auch für inverse Functionen gilt. —

5. Durch die Substitution $x=e^\theta$ ergiebt sich aus dem Theoreme:

$$F(xD_x).A_m x^m=F(m).A_m x^m,$$

eine sehr brauchbare Form, nämlich:

$$F(D_\theta).A_m e^{m\theta}=F(m).A_m e^{m\theta}.$$

Diese letzte Form scheint in Bezug auf Einfachheit vor der vorhergehenden einigen Vorzug zu haben — diese ist jedoch mehr zur Verallgemeinerung geeignet — und gestattet ebensogut praktische Anwendung. — Auch mag hier noch bemerkt werden: daß Anfänger sehr wohl thun werden, wenn sie sich in Transformationen, wie die in Rede stehende, so viel als möglich üben, weil sie da-

durch dasselbe Theorem aus verschiedenen Gesichtspunkten betrachten und eine vielfältigere Anwendung davon zu machen lernen. —

Durch dieselbe Substitution nimmt das Theorem:

$$F(x D_x) \cdot x^m v = x^m \cdot F(x D_x + m) v$$

die Form:

$$F(D_\theta) \cdot e^{m\theta} v = e^{m\theta} \cdot F(D_\theta + m) v;$$

an, wovon die beiden Modificationen:

$$e^{-m\theta} F(D_\theta) e^{m\theta} v = F(D_\theta + m) v$$

und:

$$e^{m\theta} F(D_\theta) e^{-m\theta} v = F(D_\theta - m) v.$$

gelegentlich angewandt werden können. —

6. Wenn u, v beliebige Functionen von θ sind, so ist bekanntlich:

$$D_\theta \cdot uv = u \cdot D_\theta v + D_\theta u \cdot v;$$

oder einfacher:

$$D \cdot uv = u \cdot Dv + Du \cdot v,$$

wobei bemerkt werden mag: daß, wenn ein Punkt (.) unmittelbar auf ein Operationssymbo , wie hier auf D, folgt, dadurch angedeutet werden soll: daß sich diese Operation auf die ganze zu seiner Rechten stehende Größe bezieht. — Wenn dagegen auf einen Punkt (.) zur Rechten ein Operationssubject folgt, so wird dadurch angedeutet: daß sich das zur Linken stehende Operationssymbol auf dieses Subject nicht mit bezieht. —

Wenn man auf beiden Seiten der letzten Gleichheit ein zweites Mal mit D operirt, so ergibt sich:

$$D^2 \cdot uv = u \cdot D^2 v + 2 D u \cdot Dv + D^2 u \cdot v;$$

Ein drittes Mal mit D operirt, gibt:

$$D^3 \cdot uv = u \cdot D^3 v + 3 D u \cdot D^2 v + 3 D^2 u \cdot D v + D^3 u \cdot v.$$

woraus erhellet, daß man nach n solcher Operationen allgemein hat:

$$D^n . uv = u . D^n v + n Du . D^{n-1} v + \frac{n . n-1}{1 . 2} D^2 u . D^{n-2} v + \ldots + D^n u . v.$$

Stellt man diese Resultate in eine Uebersicht zusammen, so hat man:

$$uv = uv,$$

$$D . uv = u . D v + D u . v,$$

$$D^2 . uv = u . D^2 v + 2 D u . D v + D^2 u . v,$$

$$D^3 . uv = u . D^3 v + 3 Du . D^2 v + 3 D^2 u . D v + D^3 u . v,$$

. . .

. . .

. . .

$$D^n . uv = u . D^n v + n Du . D^{n-1} v + \frac{n . n-1}{1 . 2} D^2 u . D^{n-2} v + . . + D^n u . v.$$ *)

Multiplicirt man diese Gleichheiten der Folge nach resp. mit A_0, A_1, A_2, . . . und addirt die Producte; so erhält man:

$$(A_0 + A_1 D + A_2 D^2 + A^3 D^3 + \ldots + A_n D^n) . uv$$

$$=$$

$$u . (A_0 + A_1 D + A_2 D^2 + A_3 D^3 + \ldots + A_n D^n) . v$$

$$+$$

$$Du . (A_1 + 2 A_2 D + 3 A_3 D^2 + 4 A_4 D^3 + \ldots + n A_n D^{n-1}) . v$$

$$+$$

*) Dieses Resultat ergibt sich durch Anwendung des Operationscalculs unmittelbar; denn aus:

$$D . uv = D' . uv + D'' . uv,$$

wo D' sich blos auf v und D'' nur auf u bezieht, folgt:

$$D = D' + D'',$$

mithin:

$$D^n = (D' + D'')^n, D^n . uv = (D' + D'')^n uv,$$

und:

$$D^n . uv = u D^n v + n D' u D^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1 . 2} D''^2 u D^{n-2} v + D''^n u,$$

weil die Differentiationssymbole auch distributiv sind, — woraus das obige Resultat folgt, wenn die Accente weggelassen werden. —

$$\frac{D^2u}{1.2}.(2A_2 + 3.2.A_3D + 4.3.A_4D^2 + \ldots + n.n-1.A_n D^{n-2}).v$$
$$+ \&c.$$

Hierbei ist zu bemerken, daß:

$$A_1 + 2A_2 D + 3A_3 D^2 + 4A_4 D^3 + \ldots + n A_n D^{n-1}$$

in Bezug auf den Rang oder Charakter zu:

$$A_0 + A_1 D + A_2 D^2 + A_3 D^3 + A_4 D^4 + \ldots + A_n D^n$$

in derselben Beziehung steht, als:

$$A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + \ldots + n A_n x^{n-1}$$

zu:

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots + A_nx^n.$$

Wenn aber:

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n = F(x),$$

gesetzt wird, so schreibt man:

$$A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \ldots + nA_n x^{n-1} = F'(x).$$

und wenn folglich:

$$A_0 + A_1D + A_3D^2 + \ldots + A_nD^n = F(D),$$

gesetzt wird; so kann man

$$A_1 + 2A_2D + 3A_3D^2 + \ldots + nA_n D^{n-1} = F'(D),$$

schreiben — wodurch jedoch weiter nichts gesagt sein soll: als daß $F'(D)$ in Beziehung auf den Rang oder Charakter zu $F(D)$ in derselben Relation steht, wie $F'(x)$ zu $F(x)$. —

Offenbar steht

$$2A_2 + 3.2.A_3 D + 4.3.A_4D^2 + \ldots + n.n-1.A_n D^{n-2}$$

zu:

$$A_1 + 2A_2D + 3A_3D^2 + \ldots + nA_n D^{n-1},$$

in einer ähnlichen Relation, und kann deshalb mit:

$$F''(D)$$

bezeichnet werden — u. s. f.

Wenn also F irgend eine algebraische Function bedeutet, so hat man das wichtige Theorem:

$$F(D).uv = u.F(D)v + \frac{Du}{1}.F'(D)v + \frac{D^2u}{1.2}.F''(D)v + \&c.$$

Durch die Substitution $x = e^\theta$ erhält man das Theorem:

$$F(xD_x).uv = u.F(xD_x)v + \frac{xD_xu}{1}.F'(xD_x)v + \frac{(Dx_x)^2u}{1.2}.F''(xD_x)v + \&c.$$

welches, wie das vorhergehende, Anwendungen gestattet — und zugleich, wie sich später zeigen wird, zu einer eleganten Verallgemeinerung führt. —

7. Bekanntlich ist:

$$u.Dv = D.uv - Du.v$$

und wenn in dieser Gleichheit Dv statt v gesetzt wird:

$$u.D^2v = D.uDv - Du.Dv,$$

also mit Beachtung der vorhergehenden Gleichheit:

$$u.D^2v = D(D.uv - Du.v) - D.Du.v + D^2u.v,$$

oder:

$$u.D^2v = D^2.uv - 2D.Du.v + D^2u.v.$$

Setzt man in dieser letzten Gleichheit wieder Dv statt v, und berücksichtigt die beiden vorhergehenden Gleichheiten; so ergiebt sich:

$$u.D^3v = D^3.uv - 3D^2.Du.v + 3D.D^2v.v - D^3u.v,$$

und allgemein:

$$u.D^n v = D^n.uv - nD^{n-1}.Du.v + \frac{n.n-1}{1.2}D^{n-2}.D^2u.v - \&c.$$

Hieraus erhält man auf ganz ähnliche Weise, wie in Nr. 6 das entsprechende Theorem:

$$u.F(D)v = F(D).uv - F'(D).Du.v + F''(D).\frac{D^2u}{1.2}.v - \&c.$$

und durch die Substitution $x = e^{\theta}$ erhält man die Form:

$$u\,F(xD_x)v = F(xD_x).uv - F'(xD_x)xD_x u.v + F''(xD_x.\frac{(xD_x)^2 u}{1.2}.v$$
$$-\ \&c.$$

8. Wenn Φ und Ψ zwei algebraische Functionen bedeuten, so ist bekanntlich:

$$\Phi(D_r).e^{rx} = \Phi(x).e^{rx},$$

und:

$$\Psi(D_x).e^{rx} = \Psi(r).e^{rx}.$$

Bekanntlich ist aber auch:

$$\Psi(D_x).\Phi(D_r) = \Phi(D_r).\Psi(D_x)$$

und folglich:

$$\Psi(D_x).\Phi(x).e^{rx} = \Phi(D_r).\Psi(r).e^{rx}. \qquad (\alpha)$$

Bringt man diese Gleichheit auf die Form:

$$\Psi(D_x).e^{rx}\,\Phi(x) = \Phi(D_r).e^{rx}\,\Psi(r),$$

und multiplicirt auf beiden Seiten mit e^{-rx}; so erhält man das merkwürdige Resultat:

$$\Psi(D_x + r).\Phi(x) = \Phi(D_r + x).\Psi(r). \qquad (\beta)$$

II. Anwendung der vorhergehenden Theoreme.

9. Jede Differentialgleichung wie:

$$Ax^{\alpha}\,D_x^{\alpha}.y + Bx^{\beta}\,D_x^{\beta}.y + \&c. = X,$$

wo $A, B, \ldots$ Constanten sind und X irgend eine algebraische Function der indepedenten Veränderlichen x ist, kann nach Nr. 2 des vorhergehenden Abschnittes auf die Form:

$$\left.\begin{array}{c} AxD_x(xD_x-1)\ldots(xD_x-\alpha+1) \\ + \\ BxD_x(xD_x-1)\ldots(xD_x-\beta+1) \\ +\&c. \end{array}\right\}.y = X.$$

gebracht werden, und mithin werden die Auflösungen aller solcher Differentialgleichungen durch die Realisirung oder Werthsbestimmung der symbolischen Form:

$$y = \frac{1}{F(xD_x)} \cdot X + \frac{1}{F(xD_x)} \cdot 0,$$

worin:

$$F(xD_x) = \begin{cases} AxD_x(xD_x - 1)\ldots(xD_x - \alpha + 1) \\ + \\ BxD_x(xD_x - 1)\ldots(xD_x - \beta + 1) \\ + \text{\&c.} \end{cases}$$

ist, erhalten. Setzt man nun mit Rücksicht auf die symbolische Form der Auflösung:

$$X = L + Mx + Nx^2 + \ldots + Tx^n,$$

so ist der Werth des ersten Gliedes dieser Auflösung völlig bestimmt, und nach Nr. 2 des vorhergehenden Abschnittes gleich:

$$\frac{L}{F(0)} + \frac{Mx}{F(1)} + \frac{Nx^2}{F(2)} + \ldots + \frac{Tx^n}{F(n)};$$

während die Realisirung des zweiten Gliedes den willkürlichen Bestandtheil dieser Auflösung gibt. —

Wenn die Wurzeln der Gleichung:

$$D_x(xD_x - 1)\ldots(xD_x - \alpha + 1) + \frac{B}{A} xD_x(xD_x - 1)\ldots(xD_x - \beta + 1)$$
$$+ \text{\&c.} = 0$$

alle reell und ungleich sind, so wird der willkürliche Theil der Auflösung durch:

$$\frac{1}{(xD_x - a)(xD_x - b)\ldots(xD_x - i)} \cdot 0,$$

gegeben, wo $a, b, c, \ldots i$ die Wurzelwerthe sind. —

Wenn nun A_m irgend eine Constante bedeutet, so ist bekanntlich:

$$(xD_x - m) . A_m x^m = 0.$$

und mithin ist der allgemeine Werth von:

$$\frac{N}{xD_x - a} . 0 = \frac{1}{xD_x - a} . 0 = C_a x^a$$

wo C_n irgend eine willkürliche Constante ist. —

Wenn also der obige allgemeine Ausdruck in ein System von Partialbrüchen zerlegt wird, so wird der willkürliche Theil der Auflösung der fraglichen Differentialgleichung in dem Falle ungleicher reeller Wurzeln durch:

$$C_a x^a + C_b x^b + C_c x^c + \&c. + C_i x^i,$$

ausgedrückt, wo C_a, C_b, C_c, ... C_i willkürliche Constanten sind. —

Man sieht leicht ein, daß:

$$(xD_x - m)^2 . A_m x^m . \log x = 0,$$

$$(xD_x - m)^3 . A_m x^m (\log x)^2 = 0,$$

&c.

und allgemein, daß:

$$(xD_x - m)^p . A_m x^m (\log x)^{p-1} = 0$$

ist. — Wenn also die obige Gleichung p reelle, gleiche Wurzeln hat, deren gemeinschaftlicher Werth $= a$ ist; so wird der willkürliche Theil der Auflösung durch:

$$C_a x^a . (\log x)^{p-1} + C'_a x^a . (\log x)^{p-2} + ... + C_i x^i,$$

ausdrückt, wo C_a, C'_a, ... C_i verschiedene willkürliche Constanten sind. —

Wenn endlich die fragliche Gleichung imaginäre Wurzelpaare hat, so ist die Form des arbiträren Theiles der Auflösung:

$$C_{a+b\sqrt{-1}} x^{a+b\sqrt{-1}} + C_{a-b\sqrt{-1}} x^{a-b\sqrt{-1}} + ... + C_i x^i.$$

10. Setzt man wieder $x = e^\theta$, so sieht man, daß dieselbe Auflösungsmethode, ohne die erste Reduction, auch auf Differentialgleichungen von der Form:

$$AD_\theta^a \cdot y + BD_\theta^b \cdot y + \ldots + T \cdot y = f(e^\theta, \sin\theta, \cos\theta),$$

anwendbar ist, so daß sich diese Klasse von Gleichungen durch ein einfaches und gleichförmiges Verfahren integriren läßt, welches gleicherweise bei Gleichungen von höhern, wie von niedrigern Ordnungen anwendbar ist — und, wie man folglich sehen wird, in beiden Fällen auch von einer entsprechenden Klasse partieller Differentialgleichungen die geeignete Form der Auflösung gibt. —

Denn wenn die rechte Seite auf die abgekürzte Form:

$$\Sigma A^m e^{m\theta},$$

gebracht ist, wo m positiv, oder negativ, ganz, oder gebrochen, reell, oder imaginär sein kann; so wird die Gleichung:

$$F(D_\theta) \cdot y = \Sigma A_m \cdot e^{m\theta},$$

und mithin ist die gesuchte Auflösung:

$$y = \Sigma A_m \cdot \frac{e^{m\theta}}{F(m)} + \frac{1}{FD(_\theta)} .0,$$

wo man, wenn m imaginär ist, die Kreisfunctionen wieder herstellen kann. —

Was die verschiedenen Formen betrifft, welche der arbiträre Theil der Auflösung annimmt, jenachdem die Wurzeln der Gleichung:

$$F(D_\theta) = 0$$

alle reell und ungleich, oder mehrere gleich, oder imaginär sind; so werden sie resp. durch:

$$C_a e^{a\theta} + C_b e^{b\theta} + \ldots + C_i e^{i\theta}, \tag{1}$$

$$C_a e^{a\theta} \cdot \theta^{p-1} + C'_a e^{a\theta} \cdot \theta^{p-2} + \ldots + C_i e^{i\theta}, \tag{2}$$

$$C_{a+b\sqrt{-1}} e^{(a+b\sqrt{-1})\theta} + C_{a-b\sqrt{-1}} e^{(a-b\sqrt{-1})\theta} + \ldots + C_i e^{i\theta}, \tag{3}$$

ausgedrückt. —

11. Auch die Auflösung der Differentialgleichungen von der Form:

$$A(m + \lambda x)^\alpha D_x^\alpha \cdot y + B(m + \lambda x)^\beta D_x^\beta \cdot y + \&c. = X$$

kann jetzt durch eine sehr einfache Substitution erhalten werden. — Denn setzt man:

$$m + \lambda x = \lambda x',$$

so wird diese Gleichung:

$$A\lambda^{\alpha} \,.\, x'^{\alpha} D_{x'}^{\alpha} \,.\, y + B\lambda^{\beta} \,.\, x'^{\beta} D_{x'}^{\beta} \,.\, y + \&c. = X,$$

oder:

$$F(x' D_{x'}) \,.\, y = X;$$

wovon sich die Auflösung auf der Stelle ohne jede weitere Transformation als Function von x' ergibt, und daraus die Auflösung der gegebenen Gleichung, wenn man für x' setzt:

$$\frac{m + \lambda x}{\lambda}.$$

Beispiele. — Erste Gattung.

(1) $$x^2 D_x^2 y = ax^m + bx^n .$$

oder:

$$xD_x (xD_x - 1) y = ax^m + bx^n.$$

Die symbolische Auflösung ist also:

$$y = \frac{1}{xD_x (xD_x - 1)} (ax^m + bx^n) + \frac{1}{xD_x (xD_x - 1)} 0,$$

und die realisirte oder wirkliche Auflösung:

$$y = \frac{ax^m}{m(m-1)} + \frac{bx^n}{n(n-1)} + C_0 + C_1 x.$$

(2) $$x^3 D_x^3 y = ax^m + bx^n,$$

oder:

$$xD_x (xD_x - 1)(xD_x - 2) y = ax^m + bx^n.$$

Die symbolische Auflösung ist folglich:

$$y = \frac{1}{xD(xD - 1)(xD - 2)} (ax^m + bx^n) + \frac{1}{xD(xD - 1) D(x - 2)} 0,$$

und die realisirte oder wirkliche:

$$y = \frac{ax^m}{m(m-1)(m-2)} + \frac{bx^n}{n(n-1)(n-2)} + C_0 + C_1 x + C_2 x^2.$$

(3) $$x^2 D_x^2 y - nx D_x y + ny = ax^m,$$

oder:

$$(xD_x - 1)(xD_x - n) y = ax^m;$$

folglich:

$$y = \frac{ax^m}{(m-1)(m-n)} + C_0 + C_1 x + C_2 x^n.$$

(4) $$x^2 D_x^2 y + 3x D_x y + y = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Durch Entwickelung der rechten Seite ergiebt sich:

$$(xD_x + 1)^2 . y = 1 + 2x + 3x^2 + \&c.$$

also:

$$y = \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \&c.\right) + \frac{C_1}{x} . \log x + \frac{C_2}{x},$$

oder:

$$y = \log \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}} + \frac{C_1}{x} \log x + \frac{C_2}{x}.$$

Beispiele. — Zweite Gattung.

(1) $$D_\theta y + ay = e^{m\theta},$$

$$y = \frac{e^{m\theta}}{m+a} + Ce^{-a\theta}.$$

(2) $$D_\theta y - ay = e^{m\theta} \cos r\theta,$$

oder auf die gehörige Form gebracht:

$$(D_\theta - a) . y = \tfrac{1}{2} \left\{ e^{(m + r\sqrt{-1})\theta} + e^{(m - r\sqrt{-1})\theta} \right\},$$

und die Auflösung ist mithin:

$$y = \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{e^{(m+r\sqrt{-1})\theta}}{m + r\sqrt{(-1)} - a} + \frac{e^{(m-r\sqrt{-1})\theta}}{m - r\sqrt{(-1)} - a} \right\} + Ce^{a\theta};$$

oder wenn die Kreisfunctionen wieder eingeführt werden:

$$y = e^{m\theta} \cdot \frac{(m-a)\cos r\theta + r\sin r\theta}{(m-a)^2 + r^2} + Ce^{a\theta}.$$

(3) $$D_\theta^2 y + a^2 y = \cos m\theta.$$

Diese Gleichung auf die gehörige Form gebracht, gibt:

$$(D_\theta + a\sqrt{-1}) \cdot (D_\theta - a\sqrt{-1}) \cdot y = \tfrac{1}{2}(e^{m\theta\sqrt{-1}} + e^{-m\theta\sqrt{-1}}),$$

wovon die Auflösung ist:

$$y = \tfrac{1}{2}\left(\frac{e^{m\theta\sqrt{-1}}}{a^2 - m^2} + \frac{e^{-m\theta\sqrt{-1}}}{a^2 - m^2}\right) + C_1 e^{-a\theta\sqrt{-1}} + C_2 e^{a\theta\sqrt{-1}},$$

oder, wenn die Kreisfunctionen wieder hergestellt werden:

$$y = \frac{\cos m\theta}{a^2 - m^2} + C'_1 \cos a\theta + C'_2 \sin a\theta.$$

(4) $$D_\theta^4 y + 5D_\theta^2 y + 6y = \sin m\theta.$$

oder:

$$(D_\theta^2 + 2)(D_\theta^2 + 3) \cdot y = \sin m\theta,$$

wofür die Auflösung ist:

$$y = \frac{\sin m\theta}{m^4 - 5m^2 + 6} + C'_1 \cos(2^{\frac{1}{2}} x + \alpha) + C'_2 \cos(3^{\frac{1}{2}} x + \beta).$$

(5) $$D_\theta^2 y - 2a D_\theta y + a^2 y = \sin m\theta.$$

Die symbolische Form hiervon ist:

$$(D_\theta - a)^2 \cdot y = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^{m\theta\sqrt{-1}} - e^{-m\theta\sqrt{-1}}),$$

und also die Auflösung:

$$y = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{e^{m\theta\sqrt{-1}}}{\{m\sqrt{(-1)} - a\}^2} - \frac{e^{-m\theta\sqrt{-1}}}{\{m\sqrt{(-1)} + a)\}^2}\right) + e^{a\theta}(C_1\theta + C_2)$$

oder die Kreisfunctionen wieder eingeführt:

$$y = \frac{(a^2 - m^2)\sin m\theta + 2\,am\cos m\theta}{(a^2 + m^2)^2} + e^{a\theta}(C_1\theta + C_2).$$

Drittes Kapitel.

Anwendungen auf die Integration linearer partieller Differentialgleichungen.

I. Allgemeine Theoreme.

Das Hauptobject dieses Kapitels ist: zu zeigen, daß sich durch gehörige Verallgemeinerung der in den vorhergehenden Kapiteln enthaltenen Principien und weitere Entwickelung der Folgerungen aus höhern Principien ähnliche allgemeine Methoden zur Auflösung entsprechender Klassen partieller Differentialgleichungen erhalten lassen. Diese Auflösungsmethoden sind zwar unabhängig von der Anzahl der in diesen Gleichungen vorkommenden unabhängigen Veränderlichen; allein es werden vorzugsweise nur die am häufigsten vorkommenden partiellen Differentialgleichungen mit zwei independenten Veränderlichen x, y betrachtet werden. — Hierbei werden sich zugleich Erweiterungen mancher bekannter elementarer Theoreme ergeben, welche von praktischem Nutzen zu sein scheinen:

1. Wenn $u_m = f(x, y, z, \ldots)$ eine homogene Function des m^{ten} Grades der independenten Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ ist, so ist bekanntlich:

$$xD_x u_m + yD_y u_m + zD_z u_m + \&c. = m \,.\, u_m,$$

und wenn zur Abkürzung das Operationssymbol:

$$xD_x + yD_y + zD_z + \&c. = \nabla,$$

gesetzt wird; so hat man:

$$\nabla \,.\, u_m = m \,.\, u_m.$$

Operirt man auf beiden Seiten dieser Gleichheit wieder mit ∇, so ergibt sich:

$$\nabla^2 . u_m = m^2 . u_m;$$

und so fortgesetzt, erhält man allgemein:

$$\nabla^p . u_m = m^p . u_m,$$

Wenn also F irgend eine algebraische Function bedeutet, so hat man das Theorem:

$$F(\nabla) . u_m = F(m) . u_m.$$

welches offenbar auch für inverse Functionen stattfindet — und wenn nur eine independente Veränderliche x vorhanden ist; so ergibt sich das Fundamentaltheorem in Kap. 2 wieder, nämlich:

$$F(xD_x) . A_m x^m = F(m) . A_m x^m.$$

Setzt man:

$$x = e^\varphi, \quad y = e^\psi, \&c.$$

und:

$$D_\varphi + D_\psi + \&c. = \Box,$$

so nimmt das allgemeine Theorem die Form:

$$F(\Box) . \Theta_m (e^\varphi, e^\psi, \&c.) = F(m) . \Theta_m (e^\varphi, e^\psi, \&c.),$$

an, welche der Form:

$$F(D_\theta) . A_m e^{m\theta} = F(m) . A_m e^{m\theta}$$

entspricht. —

2. Ist nun U irgend eine algebraische Function von $x, y, z, \ldots$, so kann dieselbe in homogene Functionen $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$ zerlegt und mithin auf die Form:

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

gebracht werden. — Da aber $F(\nabla)$ distributiv ist, so erhält man das Theorem:

$$F(\nabla) . U = F(0) . u_0 + F(1) . u_1 + F(2) . u_2 + \ldots + F(n) . u_n,$$

sowie das entsprechende Theorem:

$$\frac{1}{F(\nabla)} \cdot U = \frac{1}{F(0)} \cdot u_0 + \frac{1}{F(1)} \cdot u_1 + \frac{1}{F(2)} \cdot u_2 + \ldots + \frac{1}{F(n)} \cdot u_n .$$

für inverse Functionen. —

Beispiele.

(1) Wenn an U successive mit a^∇ und $\frac{1}{a^\nabla}$ operirt wird, so ergibt sich:

$$u_0 + a \cdot u_1 + a^2 \cdot u_2 + \ldots + a^n \cdot u_n,$$

und:

$$u_0 + \frac{1}{a} \cdot u_1 + \frac{1}{a^2} \cdot u_2 + \ldots + \frac{1}{a^n} \cdot u_n .$$

(2) Wenn an e^{u_n} successive mit $F(\nabla)$ und $\frac{1}{F(\nabla)}$ operirt und das Subject entwickelt wird; so erhält man:

$$F(0) \cdot 1 + F(n) \cdot \frac{u_n}{1} + F(2n) \cdot \frac{u_n^2}{1 \cdot 2} + F(3n) \cdot \frac{u_n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{\&c.}$$

und:

$$\frac{1}{F(0)} \cdot 1 + \frac{1}{F(n)} \cdot \frac{u_n}{1} + \frac{1}{F(2n)} \cdot \frac{u_n^2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{F(3n)} \cdot \frac{u_n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{\&c.}$$

(3) Da $y, z, \ldots$ in Beziehung auf x constant, und mithin $D_x, D_y, \ldots$ commutativ sind, so erhält man, wenn

$$\nabla_2 = x^2 D_x^2 + y^2 D_y^2 + \ldots + 2xy\, D_x D_y + \ldots$$

$$\nabla_3 = x^3 D_x^3 + y^3 D_y^3 + \ldots + 3x^2 y\, D_x^2 D_y + 3x y^2\, D_x D_y^2 + \ldots$$

&c.

gesetzt wird:

$$\nabla(\nabla - 1) = \nabla_2,$$

$$\nabla(\nabla - 1)(\nabla - 2) = \nabla_3,$$

&c.

und allgemein:

$$\nabla(\nabla - 1)(\nabla - 2) \ldots (\nabla - n + 1) = \nabla_n .$$

Aus dem Fundamentaltheoreme dieses Kapitels erhellet auf der Stelle, daß man hat:

$$\nabla(\nabla-1)(\nabla-2)\ldots(\nabla-n+1)\,.\,u_n = 1\,.\,2\,.\,3\ldots n\,.\,u_n.$$

4. Es wird nicht unpassend sein, hier das zuerst von Euler (Calc. Diff. S. 188.) aufgestellte Theorem:

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{\overline{m}}\,.\,u_n = \Sigma\,\frac{x^\alpha D_x^\alpha\,.\,y^\beta D_y^\beta\,.\,z^\gamma D_z^\gamma\ldots}{\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}\cdot\overline{\gamma}\ldots}\,.\,u_n,$$

wo $\alpha+\beta+\gamma+\ldots = m$ ist, zu beweisen. —

Da man hat:

$$(1+a)^\nabla U = (1+a)^{xD_x}\,.\,(1+a)^{yD_y}\,.\,(1+a)^{zD_z}\ldots\;U;$$

so ergibt sich durch Entwickelung und Gleichsetzung der Coefficienten von a^m auf beiden Seiten, wenn man die obige Gleichheit berücksichtigt:

$$\frac{\nabla(\nabla-1)\ldots(\nabla-m+1)}{\overline{m}}\,.\,U = \Sigma\,\frac{x^\alpha D_x^\alpha\,.\,y^\beta D_y^\beta\,.\,z^\gamma D_z^\gamma\ldots}{\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}\cdot\overline{\gamma}\ldots}\,.\,U,$$

und wenn man hierin $U = u_n$ setzt; so erhält man das Euler'sche Theorem. —

5. Durch ein ganz ähnliches Verfahren, wie das in Kap. 2 Nr. 4 ergibt sich das Theorem:

$$F(\nabla)\,.\,u_m V = u_m\,.\,F(\nabla+m)\,V,$$

nebst der transformirten Form:

$$F(\square)\,.\,\Theta_m(e^\varphi, e^\psi, \&c.)\,V = \Theta_m(e^\varphi, e^\psi.\,\&c.)\,.\,F(\square+m)\,V$$

welche resp.

$$F(xD_x)\,.\,x^m v = x^m\,.\,F(xD_x+m)\,v,$$

und:

$$F(D_\theta)\,.\,e^{m\theta}\,v = e^{m\theta}\,.\,F(D_\theta+m)\,v$$

analog sind. —

6. Wenn U, V beliebige Functionen von $\varphi, \psi, \ldots$ sind, so hat man offenbar:

$$\square . UV = U . \square V + \square U . V,$$

und ein zweites Mal auf beiden Seiten mit $\square$ operirt, gibt:

$$\square^2 . UV = U . \square^2 V + 2 \square U . \square V + \square^2 U . V.$$

Wird nochmals mit $\square$ operirt, so erhält man:

$$\square^3 . UV = U . \square^3 V + 3 \square V . \square^2 V + 3 \square^2 U . \square V + \square^3 U . V,$$

und mithin nach n solcher Operationen:

$$\square^n . UV = U . \square^n V + n \square U . \square^{n-1} V + \frac{n . n-1}{1 . 2} \square^2 U . \square^{n-2} V + \&c. + \square^n U . V.$$

Ordnet man diese Resultate, wie in Nr. 6 des vorhergehenden Kapitels, so ergiebt sich durch dasselbe Verfahren wie dort, das Theorem:

$$F(\square) . UV = U . F(\square) V + \frac{\square U}{1} . F'(\square) V + \frac{\square^2 U}{1 . 2} . F''(\square) V + \&c.,$$

nebst der Transformation:

$$F(\nabla) . UV = . U . F(\nabla) V + \frac{\nabla U}{1} . F'(\nabla) V + \frac{\nabla^2 U}{1 . 2} . F''(\nabla) V + \&c.$$

wo U, V jetzt Functionen von $x, y, z, \ldots$ sind, und ∇ ist das bereits angewandte Symbol. —

7. Wenn U, V beliebige Functionen von $\varphi, \psi, \ldots$ sind, so ergibt sich durch dasselbe Verfahren, wie in Kap. 2 Nr. 7 das Theorem:

$$U . F(\square) V = F(\square) . UV - F'(\square) . \square U . V + F''(\square) . \frac{\square^2 U}{1 . 2} . V - \&c.$$

nebst der Transformation:

$$U F(\nabla) V = F(\nabla) . UV - F'(\nabla) . \nabla U . V + F''(\nabla) . \frac{\nabla^2 U}{1 . 2} . V - \&c.$$

8. Bekanntlich ist:

$$D_\theta^2 . \cos m\,\theta = - m^2 . \cos m\,\theta,$$

und:

$$D_\theta^2 . \sin m\,\theta = - m^2 . \sin m\,\theta;$$

folglich:

$$f(D_\theta^2)\,.\cos m\,\theta = f(-m^2)\,.\cos m\,\theta,$$

und:

$$f(D_\theta^2)\,.\sin m\,\theta = f(-m^2)\,.\sin m\,\theta$$

und offenbar auch allgemeiner:

$$F(\nabla^2)\,.\,\{u_{m\sqrt{-1}} + u'_{-m\sqrt{-1}}\} = F(-m^2)\,.\,\{u_{m\sqrt{-1}} + u_{-m\sqrt{-1}}\}.$$

II. Anwendung der obigen Theoreme.

9. Jede partielle Differentialgleichung von der Form:

$$A\,\nabla_\alpha z + B\nabla_\beta z + \ldots = \Omega,$$

oder entwickelt:

$$\left.\begin{array}{c} A(x^\alpha D_x^\alpha z + \alpha x^{\alpha-1} y D_x^{\alpha-1} D_y\, z + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{1\,.\,2} x^{\alpha-2} y^2 D_x^{\alpha-2} D_y^2 z + ..) \\ + \\ B(y^\beta D_x^\beta z + \beta x^{\beta-1} y\, D_x^{\beta-1} D_y\, z + \dfrac{\beta(\beta-1)}{1\,.\,2} x^{\beta-2} y^2 D_x^{\beta-2}\, D_y^2 z + ..) \\ + \&c. \end{array}\right\} = \Omega$$

wo $A, B, \ldots$ Constanten sind und Ω eine beliebige algebraische Function der independenten Veränderlichen x, y bedeutet, kann nach Nr. 3 des vorhergehenden offenbar Abschnittes auf folgende Weise transformirt werden:

$$\left.\begin{array}{c} A\nabla(\nabla-1)\ldots(\nabla-\alpha+1) \\ + \\ B\nabla(\nabla-1)\ldots(\nabla-\beta+1) \\ + \&c. \end{array}\right\}.\,z = \Omega.$$

Mithin werden die Auflösungen aller solcher Gleichungen durch Realisirung der symbolischen Form:

$$z = \frac{1}{F(\nabla)}\,.\,\Omega + \frac{1}{F(\nabla)}\,.\,0$$

erhalten, wo

$$F(\nabla) = A\nabla(\nabla-1)\ldots(\nabla-\alpha+1) + B\nabla(\nabla-1)\ldots(\nabla-\beta+1) + \ldots$$

ist. — Nun ist aber der Werth des ersten Gliedes der symbolischen Auflösung völlig bestimmt, und kann sofort nach Nr. 2 dieses

Kapitels erhalten werden. — Ferner ist einleuchtend: daß die Anzahl und Beschaffenheit der von dem zweiten Gliede der symbolischen Auflösung herrührenden arbiträren Functionen nicht von der Anzahl der in der Gleichung vorkommenden indepedenten Veränderlichen, sondern nur von der Ordnung dieser Gleichung abhängig ist. —

Denn wenn die Wurzeln der Gleichung:

$$\nabla(\nabla-1)\ldots(\nabla-\alpha+1)+\frac{B}{A}\nabla(\nabla-1)\ldots(\nabla-\beta+1)+\&c.=0.$$

alle reell und ungleich sind, so hat der arbiträre Theil der Auflösung die Form:

$$u_a+u_b+u_c+\ldots+u_i,$$

wo $a, b. c \ldots i$ die Werthe der Wurzeln und $u_a, u_b, u_c, \ldots u_i$ homogene Functionen von $x, y \ldots$ resp. von den Graden $a, b, c, \ldots i$ sind, deren Form aber willkürlich ist. —

Wenn die fragliche Gleichung p gleiche Wurzeln, jede $= a$ hat, so ist die Form des willkürlichen Theiles der Auflösung:

$$u_a.(\log x+\log y)^{p-1}+v_a.(\log x+\log y)^{p-2}+\&c.+u_b+u_c+\&c.,$$

wo $u_a, v_a, \ldots$ verschiedene arbiträre homogene Functionen von demselben Grade sind. —

Wenn endlich dieselbe Gleichung imaginäre Wurzelpaare hat, so ist die Form des arbiträren Theiles der Auflösung:

$$u_{a+b\sqrt{-1}}+u_{a-b\sqrt{-1}}+u_c+\ldots+v_i.$$

10. Hieraus erhellet: daß, wenn die Auflösung einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung:

$$Ax^\alpha D_x^\alpha y+Bx^\beta D_x^\beta y+\&c.=Mx^m+Nx^n+\&c.$$

gegeben ist, man sofort die Auflösung einer partiellen Differentialgleichung:

$$\left.\begin{array}{c} A(x^\alpha D_x^\alpha.z+\alpha x^{\alpha-1}y D_x^{\alpha-1}D_y.z+\&c.) \\ + \\ B(x^\beta D_x^\beta.z+\beta x^{\beta-1}y D_x^{\beta-1}D_y.z+\&c) \\ +\&c. \end{array}\right\}=\Theta_m+\Theta_n+\&c.,$$

erhalten kann, wenn man für Mx^m, Nx^n, ... die entsprechenden bekannten homogenen Functionen Θ_m, Θ_n, ... und für jedes Glied der Auflösung der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung mit einer willkürlichen Constante, wie z. B. $C_m x^m$, eine homogene Function von x, y von demselben Grade, aber von willkürlicher Form setzt.

11. Offenbar ist die vorhin erörterte Auflösungsmethode auch auf partielle Differentialgleichungen wie:

$$A\Box^a z + B\Box^b z + .. + Tz = f\,(e^\varphi, e^\psi, \sin\varphi, \cos\varphi, \sin\psi, \cos\psi),$$

anwendbar, wo wieder

$$\Box = D_\varphi + D_\psi$$

ist. — Denn wenn diese Gleichung auf die symbolische Form:

$$F(\Box)\, z = \Sigma A_{m,n}\, e^{m\varphi + n\psi}$$

gebracht wird, wo m, n positiv, oder negativ, ganz, oder gebrochen, reell, oder imaginär sein können; so ist die Auflösung:

$$z = \Sigma A_{m,n} \frac{e^{m\varphi + n\psi}}{F(m+n)} + \frac{1}{F(\Box)} \,.\, 0,$$

wo man, wenn m oder n imaginär ist, die Kreisfunctionen wieder herstellen kann. —

Die verschiedenen Formen, welche der arbiträre Theil der Auflösung annehmen kann, jenachdem die Wurzeln der Gleichung:

$$F(\Box) = 0$$

alle reell und ungleich, zum Theil gleich, oder imaginär sind, sind folgende:

$$u_a\,(e^\varphi, e^\psi) + u_b\,(e^\varphi, e^\psi) + \text{\&c.} + u_i\,(e^\varphi, e^\psi), \tag{1}$$

$$u_a(e^\varphi, e^\psi).(\varphi + \psi)^{p-1} + v_a(e^\varphi, e^\psi).(\varphi + \psi)^{p-2} + \text{\&c.} + u_i\,(e^\varphi e^\psi), \tag{2}$$

$$u_{a+b\sqrt{-1}}(e^\varphi, e^\psi) + u_{a-b\sqrt{-1}}\,(e^\varphi, e^\psi) + \text{\&c.} + u_i\,(e^\varphi, e^\psi). \tag{3}$$

12. Durch eine ähnliche Reduction, wie die in Kap. 2 Nr. 11 angewandte, kann man sofort die Auflösung der durch:

$$\left.\begin{array}{c} A\{(m+\lambda x)^{\alpha} D_x^{\alpha} . z + \alpha (m+\lambda x)^{\alpha-1} (n+\lambda y) D_x^{\alpha-1} D_y . z \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} (m+\lambda x)^{\alpha-2} . (n+\lambda y)^2 D_x^{\alpha-2} D_y^2 . z + \&c.\} \\ + \\ B\{(m+\lambda x)^{\beta} D_x^{\beta} . z + \beta (m+\lambda x)^{\beta-1} (n+\lambda y) D_x^{\beta-1} D_y . z \\ + \frac{\beta(\beta-1)}{1.2} (m+\lambda x)^{\beta-2} (n+\lambda y)^2 D_x^{\beta-2} D_y^2 . z + \&c.\} \\ + \&c. \end{array}\right\} = \Omega,$$

dargestellten Klasse partieller Differentialgleichungen erhalten. Denn setzt man:

$$m + \lambda x = \lambda x', \, n + \lambda y = \lambda y',$$

so bekommt die Gleichung die Form:

$$F(\nabla') . z = \Omega,$$

und ohne alle weitere Reductionen erhält man die Auflösung in x' und y', wofür man nur die angenommenen Werthe zu setzen hat, um die verlangte Auflösung zu bekommen. —

Beispiele. — Erste Gattung.

(1) $$x^2 D_x^2 . z + 2xy \, D_x D_y . z + y^2 D_y^2 . z = \Theta_m + \Theta_n,$$

wo Θ_m, Θ_n gegebene homogene Functionen von x, y resp. vom m^{ten} und n^{ten} Grade sind. —

Die symbolische Auflösung ist:

$$z = \frac{1}{\nabla(\nabla-1)} (\Theta_m + \Theta_n) + \frac{1}{\nabla(\nabla-1)} 0,$$

und die wirkliche:

$$z = \frac{\Theta_m}{m(m-1)} + \frac{\Theta_n}{n(n-1)} + u_0 + u_1.$$

(2) $$\left.\begin{array}{c} x^3 D_x^3 . u + y^3 D_y^3 . u + z^3 D_z^3 . u \\ + \\ 3(x^2 y D_x^2 D_y u + x^2 z D_x^2 D_z u + x y^2 D_x D_y^2 u + \&c.) \end{array}\right\} = \Phi_m + \Phi_n,$$

wo Θ_m, Θ_n wieder zwei gegebene homogene Functionen von $x, y,$ sind. —

Die realisirte oder wirkliche Auflösung ist:

$$u = \frac{\Phi_m}{m(m-1)(m-2)} + \frac{\Phi_n}{n(n-1)(n-2)} + u_0 + u_1 + u_2.$$

(3) $x^2 D_x^2 z + 2xy D_x D_y z + y^2 D_y^2 z - n(x D_x z + y D_y z) + nz = \Theta_m,$

oder:

$$(\nabla - 1)(\nabla - n) . z = \Theta_m;$$

folglich:

$$z = \frac{\Theta_m}{(m-1)(m-n)} + u_1 + u_n.\text{*)}$$

(4) $x^2 D_x^2 . z + 2xy D_x D_y . z + y^2 D_y^2 . z + 3(x D_x . z + y D_y . z)$

$$+ z = \frac{1}{(1 - \Theta_1)^2},$$

wo Θ_1 eine gegebene homogene Function des ersten Grades von x, y ist. —

Ferner ist:

$$(\nabla + 1)^2 . z = 1 + 2\Theta_1 + 3\Theta_1^2 + \&c.$$

und folglich:

$$z = (1 + \frac{\Theta_1}{2} + \frac{\Theta_1^2}{3} + \&c.) + u_{-1} . (\log x + \log y) + v_{-1},$$

---

*) Die Auflösung von:

$$x^2 D_x^2 z + 2 xy D_x D_y z + y^2 D_y^2 z - n(x D_x z + y D_y z) + nz = 0,$$

ist also blos:

$$z = u_n + u_1.$$

Wenn $n = -\frac{3}{m+1}$ ist, so hat Jellet in seinem ausgezeichneten Werke über Variationsrechnung (Dublin 1850, p. 253) gezeigt: daß der Werth von z das Integral:

$$\int\int (px + qy - z)^m \, dx \, dy;$$

oder:

$$\int\int (x D_x z + y D_y z - z)^m \, dx \, dy$$

zwischen gewissen gegebenen Grenzen zu einem Maximum oder Minimum macht. —

oder:

$$z = \log\left(\frac{1}{1-\Theta_1}\right)^{\frac{1}{\Theta^1}} + u_{-1}\,.\,(\log x + \log y) + v_{-1},$$

wo u_{-1}, v_{-1} verschiedene arbiträre homogene Functionen mit x, y vom Grade -1 sind. —

(5) $x^2 D_x^2\,.\,z + 2xyD_xD_y\,.\,z + y^2 D_y^2\,.\,z - m(m-1)\,z = \Theta_n.$

wovon die Auflösung ist:

$$z = \frac{\Theta_n}{n(n-1) - m(m-1)} + u_\alpha + u_\beta,$$

indem α, β die Wurzeln der Gleichung sind:

$$w^2 - w - m(m-1) = 0.$$

(6) $xD_x\,.\,w + y\,D_y\,.\,w + z\,D_z\,.\,w - aw = \frac{xy}{z}.$

In symbolischer Form wird diese Gleichung:

$$(\nabla - a)\,w = \frac{xy}{z},$$

und mithin ist die Auflösung:

$$w = \frac{1}{1-a}\,.\,\frac{xy}{z} + u_a,$$

wo u_a eine arbiträre homogene Function des a^{ten} Grades von x, y, z ist.

Allgemeiner, die Auflösung von:

$$xD_x\,.\,w + yD_y\,.\,w + zD_z\,.\,w - aw = \frac{\Theta_m}{\Theta_n}$$

ist:

$$w = \frac{1}{(m-n)-a}\,.\,\frac{\Theta_m}{\Theta_n} + u_a.$$

(7) $x^n D_x^n.\,z + nx^{n-1}yD_x^{n-1}\,D_y.\,z + \frac{n.n-1}{1\,.\,2}x^{n-2}y^2D_x^{n-2}D_y^2.\,z + \&\text{c.} = 0.$

Die symbolische Form dieser Gleichung ist nach Nr. 3 dieses Kapitels:

$$\nabla(\nabla - 1)(\nabla - 2)\ldots(\nabla - n + 1)\,.\,z = 0,$$

und mithin die Auflösung unmittelbar:

$$z = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}.$$

Allgemeiner, die Auflösung von:

$$x^n D_x^n z + n x^{n-1} y D_x^{n-1} D_y z + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} y^2 D_x^{n-2} D_y^2 z + \ldots = \Theta_a + \Theta_b$$

ist:

$$z = \frac{\Theta_a}{a(a-1)..(a-n+1)} + \frac{\Theta_b}{b(b-1)..(b-n+1)} + u_0 + u_1 + .. + u_{n-1}.$$

Die Einfachheit der bei diesem letzten Beispiele angewandten Methode, in Vergleich mit den gewöhnlichen künstlichen und umständlichen Verfahrungsarten, zeigt auf das Evidenteste: was für ein kräftiges und leicht anwendbares Hülfsmittel der Operationscalcul bei der Integration von Differentialgleichungen ist. —

(8) $$x D_x z + y D_y z = 2xy \sqrt{(a^2 - z^2)}.$$

Die symbolische Form hiervon ist:

$$\nabla . \arcsin \frac{x}{a} = 2xy,$$

und folglich die Auflösung:

$$\frac{z}{a} = \sin(xy + u_0).$$

Allgemeiner, die Auflösung von:

$$x D_x w + y D_y w + z D_z w = m \Theta_m . \sqrt{(a^2 - w^3)}$$

ist:

$$\frac{w}{a} = \sin(\Theta_m + u_0).$$

(9) $$a x D_x w + b y D_y w + c z D_z w - n w = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich zurückführen auf:

$$x^{\frac{1}{a}} D_{x^{\frac{1}{a}}} . w + y^{\frac{1}{b}} D_{y^{\frac{1}{b}}} . w + z^{\frac{1}{c}} D_{z^{\frac{1}{c}}} . w - n w = 0,$$

woraus folgt:

$$w = u_n(x^{\frac{1}{a}}, y^{\frac{1}{b}}, z^{\frac{1}{c}}).$$

Und allgemein ist wegen:

$$F(xD_x, yD_y, zD_z, \&c.) \,.\, Ax^m y^n z^p \ldots = F(m, n, p, \&c.) \,.\, Ax^m y^n z^p \ldots$$

die Auflösung jeder partiellen Differentialgleichung von der Form:

$$(axD_x + byD_y + \&c. - \alpha)\,(a'xD_x + b'yD_y + \&c. - \beta) \ldots u = V,$$

wo:

$$V = \Sigma Ax^m y^n \ldots$$

ist, offenbar:

$$u = \begin{cases} \Sigma \dfrac{Ax^m y^n \ldots}{(am + bn + \&c. - \alpha)\,(a'm + b'n + \&c. - \beta) \ldots} \\ \quad + u_\alpha (x^{\frac{1}{a}}, y^{\frac{1}{b}}, \&c.) + u_\beta (x^{\frac{1}{a}}, y^{\frac{1}{b}}, \&c.). \end{cases}$$

Allgemeiner, die Auflösung jeder partiellen Differentialgleichung von der Form:

$$F(xD_x, yD_y, zD_z, \&c.) \,.\, u = \Sigma Ax^m y^n z^p \ldots$$

wird gegeben durch:

$$u = \Sigma \frac{Ax^m y^n z^p \ldots}{F(m, n, p, \&c.)} + \frac{1}{F(xD_x, yD_y, zD_z, \&c.)} 0.$$

(10) $x^2 D_x^2 z - 2xy D_x D_y z + y^2 D_y^2 z + xD_x z + yD_y z - nz = 0.$

Diese Gleichung kann auf die Form:

$$(xD_x - yD_y)^2 z - nz = 0$$

gebracht werden, woraus folgt:

$$z = u_{\sqrt{n}} \left(x, \frac{1}{y}\right) + u_{-\sqrt{n}} \left(x, \frac{1}{y}\right).$$

(11) $x^2 D_x^2 z - y^2 D_y^2 z + xD_x z - yD_y z = 0.$

Diese Gleichung läßt sich auf die Form:

$$(xD_x + yD_y) \,.\, (xD_x - yD_y) \,.\, z = 0$$

bringen, woraus folgt:

$$z = u_0 (x, y) + v_0 \left(x, \frac{1}{y}\right).$$

(12) $D_x^2 z - a^2 D_y^2 z + 2ab D_x z + 2a^2 b D_y z = 0,$

welche Gleichung offenbar auf die Form:

$$(D_x - D_{\frac{y}{a}} + 2ab)\,(D_x + D_{\frac{y}{a}})\,.\,z = 0,$$

gebracht werden kann; und die Auflösung ist:

$$z = u_{-2ab}\,(e_x, e^{-\frac{y}{a}}) + u_0\,(e^x, e^{\frac{y}{a}})$$

$$(13) \qquad D_x^2\,z - 2aD_xD_y\,z + a^2D_y^2\,z = 0.$$

Diese Gleichung ist gleichbedeutend mit:

$$(D_x - aD_y)^2\,.\,z = 0,$$

und folglich ist die Auflösung:

$$z = (x - \frac{y}{a})\,.\,u_0\,(e^x, e^{-\frac{y}{a}}) + v_0\,(e^x, e^{-\frac{y}{a}}),$$

oder:

$$z = \left(x - \frac{y}{a}\right).\,\varphi\left(x + \frac{y}{a}\right) + \psi\left(x + \frac{y}{a}\right).$$

$$(14) \qquad D_t^2 z = \frac{d^2z}{dt^2} = a^2D_x^2 z,$$

Diese Gleichung drückt die Bewegung einer schwingenden Saite und einer dünnen cylindrischen Luftsäule aus, und ist gleichbedeutend mit:

$$(D_t - aD_x)\,(D_t + aD_x)\,.\,z = 0,$$

woraus sich sofort als Auflösung ergibt:

$$z = u_0\,(e^t, e^{-\frac{x}{a}}) + v_0\,(e^t, e^{+\frac{x}{a}}),$$

während die gewöhnliche Form ist:

$$z = \Phi\,(x + at) + \Psi\,(x + at).$$

$$(15) \qquad D_t^2 z = \frac{d^2z}{dt^2} = a^2\,(D_x^2 z + 2D_xD_y\,z + D_y^2 z).$$

Diese Gleichung ist einerlei mit:

$$\{D_t - a\,(D_x + D_y)\}\,.\,\{D_t + a\,(D_x + D_y)\}\,.\,z = 0,$$

und die Auflösung derselben ist:

$$z = u_0\left(e^t, e^{-\frac{x}{a}}, e^{-\frac{y}{a}}\right) + v_0\left(e^t, e^{+\frac{a}{x}+\frac{y}{a}}\right),$$

während die gewöhnliche Form ist:

$$z = \Phi(x + at, y + at) + \Psi(x - at, y - at).$$

Bei der physikalischen Interpretation dieser Differentialgleichung ist zu bemerken: daß, obgleich

$$D_x^2 + D_y^2$$

in der Geometrie der Ebene, und:

$$D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$$

in der des Raumes von der Transformation der Coordinaten unabhängig ist, dieses doch nicht bei:

$$(D_x + D_y)^2, \text{ und } (D_x + D_y + D_z)^2$$

der Fall ist. —

Beispiele. — Zweite Gattung.

(1) $$D_\varphi z + D_\psi z + az = e^{m\varphi+n\psi},$$

$$z = \frac{e^{m\varphi+n\psi}}{m+n+a} + u_{-a}(e^\varphi, e^\psi).$$

(2) $$D_\varphi z + D_\psi z - az = e^{m\varphi+n\psi}\cos(r\varphi + s\psi).$$

Wenn diese Gleichung auf die gehörige Form gebracht wird, so erhält man:

$$(\Box - a)\,.\,z = \tfrac{1}{2}\left\{e^{(m+r\sqrt{-1})\varphi+(n+s\sqrt{-1})\psi} + e^{(m-r\sqrt{-1})\varphi+(n-s\sqrt{-1})\psi}\right\},$$

und die Auflösung ist:

$$z = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{e^{(m+r\sqrt{-1})\varphi+(n+s\sqrt{-1})\psi}}{m+n-a+(r+s)\sqrt{-1}} + \frac{e^{(m-r\sqrt{-1})\varphi+(n-s\sqrt{-1})\psi}}{m+n-a-(r+s)\sqrt{-1}}\right\} + u_a(e^\varphi, e^\psi)$$

oder durch Herstellung der Kreisfunctionen:

$$z = e^{m\varphi+u\psi}.\frac{(m+n-a)\cos(r\varphi+s\psi)+(r+s)\sin(r\varphi+s\psi)}{(m+n-a)^2+(r+s)^2} + u_a(e^\varphi, e^\psi).$$

(3) $$D_\varphi^2 z + 2D_\varphi D_\psi z + D_\psi^2 z + a^2 z = \cos(m\varphi + n\psi).$$

Wird diese Gleichung auf die gehörige Form gebracht, so ergibt sich:

$$(\square + a\sqrt{-1}) \,.\, (\square - a\sqrt{-1}) \,.\, z = \tfrac{1}{2}\{e^{(m\varphi+n\psi)\sqrt{-1}} + e^{-(m\varphi+n\psi)\sqrt{-1}}\},$$

und die Auflösung ist:

$$z = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{e^{(m\varphi+n\psi)\sqrt{-1}}}{a^2-(m+n)^2} + \frac{e^{-(m\varphi+n\psi)\sqrt{-1}}}{a^2-(m+n)^2}\right\} + u_{-a\sqrt{-1}}(e^\varphi, e^\psi) + u_{a\sqrt{-1}}(e^\varphi, e^\psi),$$

oder die Kreisfunction wieder eingeführt:

$$z = \frac{\cos(m\varphi+n\psi)}{a^2-(m+n)^2} + u_{-a\sqrt{-1}}(e^\varphi, e^\psi) + u_{a\sqrt{-1}}(e^\varphi, e^\psi),$$

wobei zu bemerken ist: daß solche Paare conjugirter arbiträrer Functionen, wie die hier vorkommenden, nur scheinbar imaginär, und gleich:

$$\cos\tfrac{1}{2}a(\varphi+\psi) \,.\, \Phi(\varphi-\psi) + \sin\tfrac{1}{2}a(\varphi+\psi) \,.\, \Psi(\varphi-\psi).$$

sind. —

(4) $D_\varphi^2 z + 2D_\varphi D_\psi z + D_\psi^2 z - 2a(D_\varphi z + D_\psi z) + a^2 z = \sin(m\varphi + n\psi)$.

Wenn diese Gleichung auf die gehörige symbolische Form gebracht wird, so bekommt man:

$$(\square - a)^2 \,.\, z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\{e^{(m\varphi+n\psi)\sqrt{-1}} - e^{-(m\varphi+n\psi)\sqrt{-1}}\},$$

und die Auflösung ist folglich auf der Stelle:

$$z = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{\dfrac{e^{(m\varphi+n\psi)\sqrt{-1}}}{\{(m+n)\sqrt{-1}-a\}^2} - \dfrac{e^{-(m\varphi+n\psi)\sqrt{-1}}}{\{(m+n)\sqrt{-1}+a\}^2}\right\} \\ \quad + u_a(e^\varphi, e^\psi) \,.\, (\varphi+\psi) + v_a(e^\varphi, e^\psi); \end{cases}$$

oder die Kreisfunctionen eingeführt:

$$z = \begin{cases} \dfrac{\{a^2-(m+n)^2\}\sin(m\varphi+n\psi) + 2a(m+n)\cos(m\varphi+n\varphi)}{\{a^2+(m+n)^2\}^2} \\ \quad + u_a(e^\varphi, e^\psi) \,.\, (\varphi+\psi) + v_a(e^\varphi, e^\psi). \end{cases}$$

13. Wir haben nun noch einen Ausnahmefall zu untersuchen, welcher zuweilen bei der Anwendung des gegenwärtigen, wie jedes andern Integrationsverfahrens vorkommt — und daher rührt:

daß der inverse Proceß auf einen unendlichen Coefficienten führen kann. — Wir wollen diesen Fall an der partiellen Differentialgleichung:

$$xD_x z + yD_y z - az = \Theta_m$$

erläutern, deren Auflösung nach unserer Methode ist:

$$z = \frac{\Theta_m}{m-a} + u_a,$$

wovon das erste Glied für $a = m$ unendlich wird. —

Um diese Schwierigkeit zu beseitigen, wollen wir in der allgemeinen Auflösung setzen:

$$u_a = v_a - \frac{\Theta_a}{m-a},$$

so wird:

$$z = \frac{\Theta_m - \Theta_a}{m-a} + v_a\,,$$

welcher Werth für $a = m$ unbestimmt wird. — Differentiirt man also Zähler und Nenner dieses Ausdruckes nach a, und bemerkt, daß:

$$\Theta_a = x^a f\left(\frac{y}{x}\right) = y^a F\left(\frac{x}{y}\right),$$

folglich:

$$\Theta_a = \frac{x^a f\left(\frac{y}{x}\right) + y^a F\left(\frac{x}{y}\right)}{2},$$

ist; so ergibt sich als Auflösung in dem Ausnahmefalle:

$$z = \Theta_m \frac{\log x + \log y}{2} + v_m.$$

Die Auflösung von:

$$xD_x w + yD_y w + zD_z w - mw = \Theta_m$$

ist hiernach offenbar:

$$w = \Theta_m \frac{\log x + \log y + \log z}{3} + v_m,$$

und kann leicht auf n independente Veränderliche ausgedehnt werden.

Beispiele.

(1) $$xD_xz + yD_yz = c.$$

Die Auflösung ist:

$$z = c\,\frac{\log x + \log y}{2} + u_0.$$

(2) $$aD_\varphi z + b\,D_\psi z = c.$$

Die Auflösung ist:

$$z = \frac{c}{2}\left(\frac{\varphi}{a} + \frac{\psi}{b}\right) + u_0\,(e^{\frac{\varphi}{a}}, e^{\frac{\psi}{b}}).$$

(3) $$x^2D_x^2\,z - y^2D_y^2z = xy.$$

Diese Gleichung kann auf die Form:

$$(xD_x + yD_y - 1)\,(xD_x - yD_y)\,.\,z = xy$$

gebracht werden, woraus folgt:

$$z = \frac{1}{xD_x - yD_y}\,.\,xy + u_1\,(x,y) + u_0\left(x, \frac{1}{y}\right),$$

oder:

$$z = xy\,\frac{\log x + \log \frac{1}{y}}{2} + u_1\,(x,y) + u_0\left(x, \frac{1}{y}\right)$$

$$= xy \log\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} + u_1\,(xy,) + u_0\left(x, \frac{1}{y}\right)$$

(4) $$D_\theta y - my = Me^{m\theta}.$$

Die Auflösung ist:

$$y = Me^{m\theta}\,.\,\theta + Ce^{m\theta}.$$

(5) $$D_\theta^2 y + m^2y = \cos m\theta.$$

Die allgemeine Auflösung dieser Gleichung in ihrer ursprünglichen Form ist:

$$y = \tfrac{1}{2}\left(\frac{e^{m\theta\sqrt{-1}}}{2m\sqrt{-1}}\,.\theta - \frac{e^{-m\theta\sqrt{-1}}}{2m\sqrt{-1}}\,.\,\theta\right) + C_1 e^{m\theta\sqrt{-1}} + C'_1 e^{-m\theta\sqrt{-1}},$$

und wenn die Kreisfunctionen wieder eingeführt werden:

$$y = \frac{\theta}{2m}\,.\sin m\theta + C_2 \cos m\theta + C'_2 \sin m\theta.$$

Differentialgleichungen der hier betrachteten Form kommen häufig bei Anwendungen der Analysis auf die Naturerscheinungen vor, z. B. in der Theorie der Bewegung des Mondes und der gestörten Bewegung des Pendels. — In diesen Fällen ist die **Zeit** die unabhängige Veränderliche, und alsdann ist y bekanntlich nicht blos **periodisch**; sondern nimmt mit der Zeit **unbeschränkt** zu.

$$(6)\quad D_\varphi^2.z + 2D_\varphi D_\psi.z + D_\psi^2.z + (m+n)^2 z = \cos(m\varphi + m\psi),$$

wovon die Auflösung ist:

$$z = \frac{\varphi+\psi}{4(m+n)} \sin(m\varphi + n\psi) + u_{(m+n)\sqrt{-1}}(e^\varphi, e^\psi) + u_{-(m+n)\sqrt{-1}}(e^\varphi, e^\psi),$$

Viertes Kapitel.

Integration verschiedener anderer Klassen totaler und partieller Differentialgleichungen.

1. Es gibt eine ausgedehnte Klasse von Differentialgleichungen, zu deren Integration verschiedene, mehr oder weniger schwerfällige Methoden in Anwendung gebracht sind, unter welchen die mittelst Reihen wohl die gebräuchlichste ist. Diese Methode ist aber wegen ihrer mehr indirecten und probirenden Form theoretisch ungenügend, und in der Praxis sehr unbequem, und gestattet als Operation keine Verallgemeinerung. —

Es seien die folgenden Gleichungen:

$$D^2y + ax^n y = 0, \tag{1}$$

$$xD^2y + Dy + y = 0, \tag{2}$$

$$D^2y + \frac{2}{x}Dy + \left(n^2 - \frac{2}{x^2}\right) y = 0. \tag{3}$$

zur Integration gegeben, so gehen dieselben, wenn sie resp. mit x^2, x und x^2 mnltiplicirt werden, über in:

$$xD\,(xD - 1)\,.\,y + bx^{n+2}\,y = 0, \tag{1'}$$

$$(xD)^2\,.\,y + xy = 0, \tag{2'}$$

$$(xD - 1)\,(xD + 2)\,.\,y + n^2x^2y = 0 \tag{3'}$$

2. Die gemeinschaftliche Form dieser Gleichungen ist aber:

$$F(xD)y + Mx^m y = 0,$$

oder allgemeiner:

$$F(xD)y + Mx^m y = X.$$

Wir wollen setzen:

$$X = \Sigma A_a\, x^a,$$

und die allgemeinere Form zu integriren suchen. — Wird auf beiden Seiten mit $\frac{1}{F(xD)}$ operirt, so ergibt sich:

$$y+\frac{1}{F(xD)}Mx^m\,.\,y=\frac{1}{F(xD)}X+\frac{1}{F(xD)}0,$$

oder:

$$y+\frac{1}{F(xD)}Mx^m\,.\,y=\Sigma\frac{A_a x^a}{F(a)}+\Sigma\, C_\alpha x^\alpha,$$

wo das letzte Glied die gewöhnliche Ergänzungsfunction ist, unter der Voraussetzung, daß alle Wurzeln der Gleichung:

$$F(u)=0$$

reell und ungleich sind, weil die wegen der etwa vorkommenden gleichen, oder imaginären Wurzeln erforderlichen Modificationen auf die Allgemeinheit der Methode keinen Einfluß haben. —

Sondert man nun den Operator auf der linken Seite von dem Operationssubjecte ab, und operirt auf der rechten Seite mit dem entwickelten Inversen desselben; so ergibt sich:

$$y=\begin{cases}\left\{1-\frac{1}{F(xD)}Mx^m+\frac{1}{F(xD)}Mx^m\frac{1}{F(xD)}Mx^m-\&c.\right\}\Sigma\frac{A_a x^a}{F(a)}\\ \qquad +\\ \left\{1-\frac{1}{F(xD)}Mx^m+\frac{1}{F(xD)}Mx^m\frac{1}{F(xD)}Mx^m-\&c.\right\}\Sigma\, C_\alpha x^\alpha,\end{cases}$$

und mithin ist die gesuchte Auflösung auf der Stelle:

$$y=\begin{cases}\Sigma\frac{A_a x^a}{F(a)}\left\{1-\frac{Mx^m}{F(a+m)}+\frac{(Mx^m)^2}{F(a+2m)F(\alpha+m)}-\&c.\right\}\\ \qquad +\\ \Sigma C_\alpha x^\alpha\left\{1-\frac{Mx^m}{F(\alpha+m)}+\frac{(Mx^m)^2}{F(\alpha+2m)\,F(\alpha+m)}-\&c.\right\},\end{cases}$$

Wenn $M=0$ ist, so kommt man offenbar wieder auf eine bereits in Kap. 2 betrachtete Klasse von Differentialgleichungen. —

Daß unsere Methode leicht verallgemeinert werden kann

läßt sich jetzt leicht zeigen. — Denn es sei die zu integrirende partielle Differentialgleichung:

$$F(\nabla)z + \Theta_m z = \Omega,$$

wo Θ_m eine homogene Function des m^{ten} Grades von x, y, Ω eine gemischte Function von x, y und ∇ das Operationssymbol:

$$xD_x + yD_y$$

bedeutet. —

Operirt man mit:

$$\frac{1}{F(\nabla)},$$

nachdem Ω vorher in homogene Functionen zerlegt ist; so erhält man:

$$\left\{1 + \frac{1}{F(\nabla)}\Theta_m\right\} z = \Sigma \frac{\Theta_a}{F(a)} + \Sigma u_\alpha,$$

wo u_α eine homogene Function von dem gegebenen Grade α, aber von arbiträrer Form ist, und wenn auf beiden Seiten mit dem entwickelten Inversen von:

$$\left\{1 + \frac{1}{F(\nabla)}\Theta_m\right\},$$

operirt wird; so ergibt sich auf der Stelle wieder:

$$z = \begin{cases} \Sigma \dfrac{\Theta_a}{F(a)} \left\{1 - \dfrac{\Theta_m}{F(a+m)} + \dfrac{\Theta_m^2}{F(a+2m)\,F(a+m)} - \&c.\right\} \\ + \\ \Sigma u_\alpha \left\{1 - \dfrac{\Theta_m}{F(\alpha+m)} + \dfrac{\Theta_m^2}{F(\alpha+2m)\,F(\alpha+m)} - \&c.\right\} \end{cases}$$

3. Wir wollen diese Methode nun auf das erste der obigen Beispiele in seiner modificirten Form:

$$xD(xD-1)y + ax^{n+2}y = 0.$$

anwenden.

Operirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung mit:

$$\frac{1}{xD(xD-1)},$$

so ergibt sich:

$$y=\frac{1}{xD(xD-1)}ax^{n+2}y=C_1x+C_2;$$

folglich, wenn zur Abkürzung $n+2=m$ gesetzt wird:

$$y=\left\{1-\frac{1}{xD(xD-1)}ax^m+\frac{1}{xD(xD-1)}ax^m\frac{1}{xD(xD-1)}ax^m\right.$$
$$\left.-\&c.\right\}(C_1x+C_2),$$

oder:

$$y=\begin{cases} C_1x\left\{1-\frac{ax^m}{(m+1)m}+\frac{(ax^m)^2}{(2m+1)2m(m+1)m}-\&c.\right\} \\ + \\ C_0\left\{1-\frac{ax^m}{m(m-1)}+\frac{(ax^m)^2}{2m(2m-1)m(m-1)}-\&c.\right\} \end{cases}$$

woraus sich die Auflösung der gegebenen Gleichung ergibt, wenn $n+2$ für m gesetzt wird. — Für $n=-2$ ist diese Entwickelung unbrauchbar; aber in diesem Falle ist die Auflösung nach Kap. 2 offenbar:

$$y=Ax^\alpha+Bx^\beta,$$

wo α, β die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$p(p-1)+a=0$$

sind. — Ebenso leicht wird in jedem andern Falle der Unbrauchbarkeit der obigen Entwickelung die Auflösung gefunden. —

4. Wenn die partielle Differentialgleichung:

$$x^2D_x^2z+2xyD_xD_yz+y^2D_y^2z+\Theta_m.z=0,$$

zu integriren ist, welche bekanntlich auf die Form:

$$\nabla(\nabla-1)z+\Theta_m z=0,$$

gebracht werden kann; so ergibt sich durch Operation auf beiden Seiten dieser Form mit:

$$\frac{1}{\nabla(\nabla-1)},$$

sofort:

$$z+\frac{1}{\nabla(\nabla-1)}\Theta_m z=u_1+u_0,$$

woraus man wieder wie oben erhält:

$$z=\begin{cases} u_1\left\{1-\frac{\Theta_m}{(m-1)m}+\frac{\Theta_m^2}{(2m+1)2m(m+1)m}-\&c.\right\} \\ + \\ u_0\left\{1-\frac{\Theta_m}{m(m-1)}+\frac{\Theta_m^2}{2m(2m-1)m(m-1)}-\&c.\right\} \end{cases}$$

5. Wir wollen dieselbe Methode nun auf die zweite der obigen Gleichungen in ihrer modificirten Form:

$$(xD)^2.y+xy=0,$$

anwenden, indem wir bemerken, daß Graves zuerst gezeigt hat: daß sich diese Gleichung nach dieser Methode integriren läßt. — Operirt man auf beiden Seiten mit $\frac{1}{(xD)^2}$, so erhält man:

$$y+\frac{1}{(xD)^2}xy=C_1\log x+C_2;$$

woraus folgt:

$$y=\left\{1-\frac{1}{(xD)^2}x+\frac{1}{(xD)^2}x\frac{1}{(xD)^2}x-\&c.\right\}(C_1\log x+C_2),$$

oder:

$$y=\begin{cases} C_1\left\{1-x\frac{1}{(1+xD)^2}+x^2\frac{1}{(2+xD)^2(1+xD)^2}-\&c.\right\}\log x, \\ + \\ C_2\left\{1-\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{1^2 2^2}-\frac{x^3}{1^2.2^2.3^2}+\frac{x^4}{1^2.2^2.3^2.4^2}-\&c.\right\}. \end{cases}$$

Es ist aber:

$$\frac{1}{(1+xD)^2}\log x=\frac{1}{1^2}(1-\frac{2}{1}xD)\log x=\frac{1}{1^2}(\log x-2),$$

$$\frac{1}{(2+xD)^2(1+xD)^2}\log x=\frac{1}{1^2.2^2}\left\{1-2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)xD\right\}\log x$$

$$=\frac{1}{1^2 2^2}\left\{\log x-2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)\right\}, \&c.$$

und daher endlich:

$$y = \begin{cases} (C_1 \log x + C_2) \{ 1 - \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{1^2 . 2^2} - \frac{x^3}{1^2 . 2^2 . 3^2} + \&c. \} \\ + \\ 2C_1 \left\{ \frac{1}{1^2} x - \frac{1}{1^2 . 2^2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) x^2 + \frac{1}{1^2 . 2^2 . 3^2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) x^3 - \&c. \right\} \end{cases}$$

6. Wenn die zu integrirende Gleichung folgende ist:

$$xD^2y + Dy + Mx^{m-1} y = 0,$$

so erhält man mittelst derselben allgemeinen Methode sehr leicht das Integral:

$$y = \begin{cases} C_1 \{ 1 - Mx^m \frac{1}{(m + xD)^2} + (Mx^m)^2 \frac{1}{(2m + xD^2 (m + xD)^2} - \&c. \} \log x \\ + \\ C_2 \{ 1 - \frac{Mx^m}{m^2} + \frac{(Mx^m)^2}{m^2 . (2m)^2} - \frac{(Mx^m)^3}{m^2 . (2m)^2 . (3m)^2} + \&c. \}; \end{cases}$$

oder:

$$y = \begin{cases} (C_1 \log x + C_2) \{ 1 - \frac{Mx^m}{m^2} + \frac{(Mx^m)^2}{m^2 . (2m)^2} - \frac{(Mx^m)^3}{m^2 . (2m)^2 . (3m)^2} + \&c. \} \\ + \\ 2C_1 \left\{ \frac{Mx^m}{m^3} - \frac{m(2+1)(Mx^m)^2}{m^3 (2m)^3} + \frac{m^2(6+3+2)(Mx^m)^3}{m^3 (2m)^3 (3m)^3} - \&c. \right\} \end{cases}$$

7. Desgleichen, wenn die partielle Differentialgleichung:

$$\nabla_2 . z + \nabla . z + \Theta_m . z = 0,$$

wo:

$$\nabla_2 = x^2 D_x^2 + 2xy D_x D_y + y^2 D_y^2$$

ist, zu integriren wäre; so gibt die entsprechende Reduction:

$$z + \frac{1}{\nabla^2} \Theta_m . z = u_0 \frac{\log x + \log y}{2} + v_0,$$

und die symbolische Auflösung ist:

$$z = \left(1 - \frac{1}{\nabla^2}\Theta_m + \frac{1}{\nabla^2}\Theta_m \frac{1}{\nabla^2}\Theta_m - \&c.\right)\left(u_0 \frac{\log x + \log y}{2} + v_0\right).$$

woraus folgt:

$$z = \begin{cases} u_0 \left\{1 - \Theta_m \frac{1}{(m+\nabla)} + \Theta_m^2 \frac{1}{(m+\nabla)^2 (2m+\nabla)^2} - \&c.\right\} \frac{\log x + \log y}{2} \\ + \\ v_0 \left\{1 - \frac{\Theta_m}{m^2} + \frac{\Theta_m^2}{m^2 . (2m)^2} - \frac{\Theta_m^3}{m^2 . (2m)^2 (3m)^2} + \&c.\right\}; \end{cases}$$

und endlich:

$$z = \begin{cases} \left(u_0 \frac{\log x + \log y}{2} + v_0\right)\left\{1 - \frac{\Theta_m}{m^2} + \frac{\Theta_m^2}{m^2 . (2m)^2} - \frac{\Theta_m^3}{m^2 . (2m)^2 . (3m)^2} + \&c.\right\} \\ + \\ 2u_0 \left\{\frac{1}{m^3}\Theta_m - \frac{m(2+1)}{m^3 (2m)^3}\Theta_m^2 + \frac{m^2(6+3+2)}{m^3 . (2m)^3 . (3m)^3}\Theta_m^3 - \&c.\right\} \end{cases}$$

8. Wenden wir jetzt dieselbe Methode auf die modificirte Form des dritten der obigen Beispiele an:

$$(xD - 1)(xD + 2)\, y + n^2 x^2 . y = 0,$$

so ergibt sich:

$$y + \frac{1}{(xD-1)(xD+2)} n^2 x^2 . y = C_1 x + \frac{C_2}{x^2}.$$

Die Auflösung wird folglich durch:

$$y = \left\{1 - \frac{1}{(xD-1)(xD+2)} n^2 x^2 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(xD-1)(xD+2)} n^2 x^2 \frac{1}{(xD-1)(xD+2)} n^2 x^2 - \&c.\right\}\left(C_1 x + \frac{C_2}{x^2}\right)$$

gegeben, und ist:

$$y = \begin{cases} C_1 x \left\{1 - \frac{(nx)^2}{2 . 5} + \frac{(nx)^4}{2 . 4 . 5 . 7} - \&c.\right\} \\ + \\ \frac{C_2}{x^2}\left\{1 + \frac{(nx)^2}{1 . 2} - \frac{(nx)^4}{1 . 2 . 4} + \&c.\right\}. \end{cases}$$

Zur Summation solcher Reihen, wie die letzten, ist uns von Curtis die folgende allgemeine Methode mitgetheilt:

Man bringe jedes Reihenglied auf der rechten Seite in die Form:

$$\Sigma f(m) u_m;$$

und da diese bekanntlich mit:

$$f(\nabla)\, \Sigma u_m,$$

gleichgeltend ist; so kommt es blos noch auf die Bestimmung von

$$\Sigma u_m$$

an, welche im Allgemeinen mittelst bekannter Methoden bewerkstelligt werden kann. —

Die rechte Seite der letzten Gleichung kann hiernach auf folgende Form:

$$\frac{C'_1}{x^2}\Big\{2\frac{(nx)^3}{\overline{3}} - 4\frac{(nx)^5}{\overline{5}} + 6\frac{(nx)^7}{\overline{7}} - \&c.\Big\} + \frac{C'_2}{x^2}\Big\{1 + 1\frac{(nx)^2}{\overline{2}} - 3\frac{(nx)^4}{\overline{4}} + \&c\Big\}$$

gebracht werden, oder:

$$-\frac{C'_1}{x^2}(xD-1)\Big\{nx - \frac{(nx)^3}{\overline{3}} + \frac{(nx)^5}{\overline{5}} - \frac{(nx)^7}{\overline{7}} + \&c.\Big\}$$

$$-\frac{C'_2}{x^2}(xD-1)\Big\{1 - \frac{(nx)^2}{\overline{2}} + \frac{(nx)^4}{\overline{4}} - \frac{(nx)^6}{\overline{6}} + \&c.\Big\}$$

oder:

$$-\frac{1}{x^2}(xD-1)\{C'_1 \sin nx + C'_2 \cos nx\} = -\frac{1}{x^2}(xD-1) A \cos(nx+B).$$

und das Integral der in Rede stehenden Differentialgleichung ist folglich:

$$y = \frac{A}{x^2}\cos(nx+B) + \frac{nA}{x}\sin(nx+B).$$

9. Diese Integrationsmethode läßt sich auch leicht auf folgende drei Differentialgleichungen:

$$D^2y - \frac{c^2}{x^4}\, y = 0,$$

$$D^2y + \frac{c^2}{x^4} y = 0,$$

$$D^2y + c^2 y = \frac{6y}{x^2},$$

anwenden.

Die erste Form der Integrale dieser Gleichungen ist:

$$y = \begin{cases} C_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{c}{x}\right)^2 + \frac{1}{2.3.4.5}\left(\frac{c}{x}\right)^4 + \&c. \right\} \\ + \\ C_1 x \left\{ 1 + \frac{1}{1.2}\left(\frac{c}{x}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{c}{x}\right)^4 + \&c. \right\}, \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} C_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2.3}\left(\frac{c}{x}\right)^2 + \frac{1}{2.3.4.5}\left(\frac{c}{x}\right)^4 - \&c. \right\} \\ + \\ C_1 x \left\{ 1 - \frac{1}{1.2}\left(\frac{c}{x}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{c}{x}\right)^4 - \&c. \right\}, \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} C_1 x^3 \left\{ 1 - \frac{(cx)^2}{2.7} + \frac{(cx)^4}{2.4\ 7.9} - \&c. \right\} \\ + \\ C_2 x^{-2} \left\{ 1 + \frac{(cx)^2}{2.3} + \frac{(cx)^4}{1.2.3.4} - \&c. \right\}, \end{cases}$$

welche sich offenbar noch weiter zusammenziehen läßt. — Das erste Integral ist offenbar gleichbedeutend mit:

$$y = \frac{C_0 x}{2c}\left(e^{\frac{c}{x}} - e^{-\frac{c}{x}}\right) + \frac{C_1 x}{2}\left(e^{\frac{c}{x}} + e^{-\frac{c}{x}}\right),$$

oder:

$$y = x\left(A e^{\frac{c}{x}} + B e^{-\frac{c}{x}}\right),$$

und ebenso läßt sich das zweite Integral auf die Form:

$$y = x\left(A' \sin\frac{c}{x} + B' \cos\frac{c}{x}\right).$$

bringen. —

Das dritte Integral kann nach der Methode von Curtis offenbar auf die Form:

$$\frac{C'_1}{(cx)^2}\left\{\frac{(cx)^5}{1.3.5} - \frac{(cx)^7}{1.2.3.5.7} + \frac{(cx)^9}{1.2.3.4.5.7.9} - \&c.\right\}$$

$$+$$

$$\frac{C'_2}{(cx)^2}\left\{3 + \frac{(cx)^2}{1.2} + \frac{(cx)^4}{1.2.4} - \frac{(cx)^6}{1.2.4.6} + \&c.\right\}.$$

gebracht werden. — Das allgemeine Glied jeder dieser Reihen ist aber:

$$\pm \frac{(cx)^m}{1.2\ldots.(m-4)(m-2)m} = \pm (m-3)(m-1)\frac{(cx)^m}{\overline{m}}$$

und mithin ist die Auflösung:

$$y = \frac{1}{(cx)^2}(xD-3)(xD-1)(C'_1 \sin cx + C'_2 \cos cx),$$

oder:

$$y = A\left\{\left(1 - \frac{3}{(cx)^2}\right)\sin(cx+B) + \frac{3}{cx}\cos(cx+B)\right\}.$$

10. Es muß hier bemerkt werden: daß, obgleich bei der hier erörterten Integrationsmethode durchaus kein mathematischer Kunstgriff angewandt ist, das Integral dennoch auf die directeste Weise erhalten zu sein scheint. Gleichwohl sind oft beträchtliche analytische Kenntnisse erforderlich, um das Integral auf seine einfachste Form zu reduciren. —

Gregory hat in Bezug auf Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten, namentlich auf die zweite der zuletzt betrachteten Gleichungen, folgende wichtige Bemerkung gemacht: „Wenn solche Gleichungen von der zweiten, oder von einer höhern Ordnung sind, so ist die Anzahl der Fälle, wo sie integrabel sind, sehr klein, und vorläufig auch keine Aussicht vorhanden,

daß sie merklich größer werden wird. — Der Grund hiervon läßt sich leicht angeben. — Wenn wir sagen: daß eine Differentialgleichung integrabel sei, so ist damit gemeint: daß sich die abhängige Veränderliche mittelst der bekannten algebraischen und transcendenten Functionen durch die unabhängige Veränderliche ausdrücken läßt. — Nun ist aber bekannt, daß schon die einfachsten Differentialgleichungen, zu ihrer Integration die höchsten uns genau bekannten Transcendenten, wie e^{ax}, $\cos nx, \ldots$ erfordern, und es ist folglich zu erwarten: daß die Integrale complicirterer Differentialgleichungen noch höhere Transcendenten enthalten werden. welche bisher noch keine besondern Namen erhalten haben, und auch nicht als vollständig bekannt anzusehen sind. — Dieses ist z. B. schon bei der Gleichung:

$$xD^2y + Dy + y = 0,$$

der Fall, in deren Integral die Transcendente:

$$\psi(x) = 1 - \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{1^2.2^2} - \frac{x^3}{1^2.2^2.3^2} + \text{\&c.}$$

vorkommt.

„Bevor also in der Integration der Differentialgleichungen Fortschritte gemacht werden können, müssen neue Transcendenten gebildet, und ihre Eigenschaften untersucht werden, in ähnlicher Weise, wie die gewöhnlichen Transcendenten e^x, $\cos x, \log x, \ldots$ formirt und deren Eigenschaften untersucht sind — und dann muß man die Integrale der Differentialgleichungen durch diese neuen Transcendenten auszudrücken suchen. — Mit der Bildung und Untersuchung solcher neuer Transcendenten haben sich die ausgezeichnetsten Analysten seit längerer Zeit beschäftigt, und es sind in dieser Beziehung bereits große Fortschritte gemacht; allein es bleibt noch Vieles zu leisten übrig. — Auch mit dem andern Probleme: die Integrale der Differentialgleichungen durch solche Transcendenten auszudrücken — hat man sich beschäftigt, jedoch noch nicht in der Ausdehnung, wie mit dem ersten — und mehrere Mathematiker haben sogar Differentialgleichen durch bestimmte Integrale

mit Erfolg zu integriren gesucht. — Solche Integrale sind in der That neue Transcendenten der vorhin erwähnten Art — und es ist z. B.:

$$1 - \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{1^2.2^2} - \frac{x^3}{1^2.2^2.3^3} + \&c. = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\theta \cos(2 \sin \theta x^{\frac{1}{2}}).$$

Beispiele solcher Integrale findet man in Crelle's Journal Bd. 10, S. 92, Bd. 12, S. 144 und Bd. 17, S. 363. —"

Das bestimmte Integral:

$$\frac{C_2}{\pi}\int_0^\pi d\theta \cos(2 \sin \theta x^{\frac{1}{2}}),$$

so lange der Zahlenwerth desselben nicht ermittelt ist, scheint aber ebensowohl als ein Symbol betrachtet werden zu müssen, wie:

$$\left\{ 1 + \frac{1}{(xD)^2} x \right\}^{-1} . C_2,$$

so daß alle symbolische Zusammenziehungen, sowohl als bestimmte Integrale, als neue Transcendenten angesehen werden können. —

Wenn z. B.:

$$U = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \&c.$$

ist, wo $A_0, A_1, A_2, \ldots$ Constanten sind; so ist nach Kap. 2:

$$F(xD) . U = F(0) A_0 + F(1) A_1 x + F(2) A_2 x^2 + \&c.$$

$$\frac{1}{F(xD)} . U = \frac{1}{F(0)} A_0 + \frac{1}{F(1)} A_1 x + \frac{1}{F(2)} A_2 x^2 + \&c.$$

und die linken Seiten dieser Gleichheiten können füglich als solche Transcendenten betrachtet werden. —

11. Wir haben gezeigt: daß eine Differentialgleichung wie:

$$xD_x . z + yD_y . z - az = \Theta_m(x, y) + \Theta_n(x, y) + \&c.,$$

wo Θ_m, Θ_n homogene Functionen von x, y resp. vom m^{ten} und n^{ten} Grade bedeuten, sofort die Auflösung:

$$z = \frac{\Theta_m}{m-a} + \frac{\Theta_n}{n-a} + \&c. + u_a(x, y)$$

gibt, wo u_a eine homogene Function von x, y von einem gegebenen Grade a, aber von arbiträrer Form ist.

Durch die Substitutionen:

$$x = e^\varphi, \quad y = e^\psi,$$

ergibt sich mithin, daß das Integral einer Gleichung wie:

$$D_\varphi . z + D_\psi . z - az = \Theta_m (e^\varphi, e^\psi) + \Theta_n (e^\varphi, e^\psi) + \&c.$$

ist:

$$z = \frac{\Theta_m}{m-a} + \frac{\Theta_n}{n-a} + \&c. + u_a (e^\varphi, e^\psi),$$

wo die Veränderlichen in dem bestimmten Theile des Integrales ebenso gruppirt sind, als in der zu integrirenden Gleichung selbst — den Fall gleicher Wurzeln des Operators auf der linken Seite dieser letzten Gleichung ausgenommen, wovon bereits im vorhergehenden Kapitel die Rede gewesen ist. —

Wenn jedoch die rechte Seite der letzten Form der Differentialgleichung nicht mehr als eine Function von e^φ, e^ψ, sondern blos von φ, ψ angenommen wird; so ist unsere Methode praktisch unbrauchbar, weil φ und ψ sich nicht durch eine endliche Anzahl von Gliedern mit e^φ, e^ψ ausdrücken lassen. —

12. Diese Schwierigkeit wird jedoch durch Verallgemeinerung einer Methode beseitigt, welche an der gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$D_\theta y - ay = \theta^4$$

erläutert werden soll. —

Das Integral dieser Gleichung wird durch:

$$y = (D_\theta - a)^{-1} . \theta^4 + Ce^{a\theta}$$

oder:

$$y = -(a - D_\theta)^{-1} . \theta^4 + Ce^{a\theta}$$

gegeben, indem der arbiträre Theil desselben in allen Fällen von der Natur der rechten Seite dieser Gleichung unabhängig ist. — Wenn das erste Glied der rechten Seite bis zur 4ten Potenz von D_θ entwickelt wird, da eine weitere Entwickelung nutzlos ist; so erhält man:

$$-\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{a}D_\theta+\frac{1}{a^2}D_\theta^2+\frac{1}{a^3}D_\theta^3+\frac{1}{a^4}D_\theta^4\right).\theta^4.$$

Werden die angezeigten Operationen wirklich ausgeführt, so erhält man das Integral:

$$y=-\left(\frac{\theta^4}{a}+\frac{4.\theta^3}{a^2}+\frac{4.3.\theta^2}{a^3}+\frac{4.3.2.\theta}{a^4}+\frac{4.3.2.1}{a^5}\right)+Ce^{a\theta},$$

und zwar durch Differenzinen. —

Ebenso wird das Integral der partiellen Differentialgleichung:

$$D_\varphi . z + D_\psi . z - az = \Theta_4(\varphi, \psi)$$

durch:

$$z=-\frac{1}{a}\left(1+\frac{\square}{a}+\frac{\square^2}{a^2}+\frac{\square^3}{a^3}+\frac{\square^4}{a^4}\right).\Theta_4+u_a(e^\varphi, e^\psi)$$

gegeben, und durch wirkliche Ausführung der an der besondern Form von Θ_4 angezeigten Operationen erhalten. — Wenn man also in der Entwickelung bei der 4ten Potenz des Symboles $\square$ stehen bleibt, so nimmt man offenbar an: daß die homogene Function Θ_4 keine negativen Potenzen von φ oder ψ enthält, weil sonst die Entwickelung ins Unendliche fortgehen würde. —

13. Als ein zweites Erläuterungsbeispiel dieser Methode wollen wir die Gleichung:

$$D_\theta^2 y - 4D_\theta y + 4y = \theta^2,$$

oder:

$$(D_\theta - 2)^2 . y = \theta^2$$

betrachten, so wird das Integral derselben durch:

$$y=(2-D_\theta)^{-2}.\theta^2+Ce^{2\theta}.\theta+C'e^{2\theta}$$

gegeben; oder wenn man das erste Glied bis zu der 2ten Potenz von D_θ entwickelt:

$$y=\frac{1}{2^2}\left\{1+\frac{2}{2}D_\theta+\frac{3}{2^2}D_\theta^2\right\}.\theta^2+Ce^{2\theta}.\theta+C'e^{2\theta},$$

und endlich durch wirkliche Ausführung der angedeuteten Operationen:

$$y=\frac{1}{2^2}\left\{\theta^2+\frac{2.2.\theta}{2}+\frac{3.2.1}{2^2}\right\}+Ce^{2\theta}.\theta+C'e^{2\theta}.$$

Ganz in ähnlicher Weise läßt sich die partielle Differentialgleichung:

$$D_\varphi^2 z + 2 D_\varphi D_\psi z + D_\psi^2 z - 4(D_\varphi z + D_\psi z) + 4z = \Theta_2(\varphi, \psi)$$

integriren. — In der That wird das Integral derselben durch:

$$z = \frac{1}{2^2}\left\{1 + \frac{2}{2}\square + \frac{3}{2^2}\square^2\right\} . \Theta_2(\varphi,\psi) + u_2(e^\varphi, e^\psi).(\varphi+\psi) + v_2(e^\varphi, e^\psi)$$

gegeben, wenn die angedeuteten Operationen an der besondern Form von Θ_2, welche wieder keine negativen Potenzen der independenten Veränderlichen enthalten darf, wirklich ausgeführt werden. —

Aus der Natur der betrachteten Fälle ist einleuchtend, daß die Brauchbarkeit der in Rede stehenden Integrationsmethode zuletzt davon abhängt: daß nur eine endliche Anzahl von Gliedern des symbolischen Operators entwickelt zu werden brauchen. — Es sind übrigens auch andere Fälle denkbar, in welchen diese Integrationsmethode mit Vortheil angewandt werden kann; z. B. wenn die Resultate der angezeigten Operationen periodisch sind, oder wenn die verschiedenen, nach Verrichtung dieser Operationen erhaltenen Glieder ein erkennbares Gesetz befolgen. —

14. Offenbar läßt sich diese Integrationsmethode noch mehr verallgemeinern. Denn durch ein in jeder Beziehung mit dem obigen identisches Verfahren läßt sich die partielle Differentialgleichung:

$$F_1(\varphi,\psi) . D_\varphi z + F_2(\varphi,\psi) . D_\psi z - az = \Omega(\varphi,\psi)$$

behandeln, deren Integral durch:

$$z = \begin{cases} - \{a - F_1(\varphi,\psi) . D_\varphi - F_2(\varphi,\psi) . D_\psi\}^{-1} . \Omega \\ + \{F_1(\varphi,\psi) . D_\varphi + F_2(\varphi,\psi) . D_\psi - a\}^{-1} . 0 \end{cases}$$

gegeben wird, wo Ω in Systeme homogener Glieder zerlegt werden muß, deren Grad und Beschaffenheit bestimmen, wie weit das Operationssymbol zu entwickeln ist. —

15. In Bezug auf die Integration der Gleichung:

$$D_\varphi z + D_\psi z - az = \Theta_1(\varphi, \psi)$$

ist einleuchtend: daß die obige Methode unbrauchbar wird, wenn $a = 0$ ist, und in solchen Fällen muß man zu andern Mitteln seine Zuflucht nehmen. —

Es sei z. B. die partielle Differentialgleichung:

$$D_x z + D_y z = x^m y^n$$

zu integriren, so hat man nach Kap. 2, Nr. 1, weil D_y in Bezug auf D_x constant ist:

$$\frac{1}{D_x + D_y} = e^{-xD_y} \cdot \frac{1}{D_x} \cdot e^{xD_y};$$

folglich:

$$z = e^{-xD_y} \cdot \frac{1}{D_x} \cdot x^m (x+y)^n + u_0(e^x, e^y),$$

oder eine particuläre Auflösung der gegebenen Gleichung ist:

$$z = \frac{x^{m+n+1}}{m+n+1} + n\,\frac{x^{m+n}}{m+n}(y-x) + \frac{n.n-1}{1.2}\,\frac{x^{m+n-1}}{m+n-1}(y-x)^2 + \&c.$$
$$+ u_0(e^x, e^y),$$

und wenn damit die entsprechende particuläre Auflösung in y verbunden wird; so erhält man als vollständige Auflösung:

$$z = \begin{cases} \dfrac{x^{m+n+1} + y^{m+n+1}}{2(m+n+1)} + \dfrac{nx^{m+n} - my^{m+n}}{2(m+n)}(y-x) + \\[2ex] \dfrac{\frac{n(n-1)}{1.2}x^{m+n-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}y^{m+n-1}}{2(m+n-1)}(y-x)^2 + \&c. + \varphi(x-y). \end{cases}$$

16. Als ein zweites Erläuterungsbeispiel dieser Integrationsmethode wollen wir die partielle Differentialgleichung:

$$aD_x w + bD_y w + cD_z w = xyz.$$

betrachten. Wird dieselbe auf die Form:

$$D_{\frac{x}{a}} w + D_{\frac{y}{b}} w + D_{\frac{z}{c}} w = abc \cdot \frac{x}{a}\,\frac{y}{b}\,\frac{z}{c},$$

gebracht, so ist einleuchtend: daß das Integral in Beziehung auf $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$ symmetrisch sein muß, und durch ein ähnliches Verfahren, wie das in der vorhergehenden Nr. angewandte, findet man:

$$w = \frac{abc}{3}\Big[\frac{1}{12}\Big(\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^4}{b^4}+\frac{x^4}{c^4}\Big)-\frac{1}{6}\Big\{\frac{x^3}{a^3}\Big(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\Big)+\frac{y^3}{b^3}\Big(\frac{z}{c}+\frac{x}{a}\Big)+\frac{z^3}{c^3}\Big(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\Big)\Big\}$$
$$+\frac{x}{a}\frac{y}{b}\frac{z}{c}\Big(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\Big)\Big]+u_0\,(e^{\frac{x}{a}}, e^{\frac{y}{b}}, e^{\frac{z}{c}}).$$

Es kann nicht genug wiederholt werden: daß, wenn die zu integrirenden Gleichungen symmetrisch sind, nicht blos die Integrale derselben ebenfalls symmetrisch sind, sondern daß letztere auch durch symmetrische Methoden erhalten werden. — Es wäre deshalb sehr wünschenswerth, wenn man im Besitz einer allgemeinen operativen Methode wäre, vermittelst welcher man die Integrale von Differentialgleichungen, wie die vorhin betrachteten erhalten könnte. —

17. Es sei von der allgemeinen Gleichung:

$$D_x^n \,.\, z + A_1 D_x^{n-1} D_y \,.\, z + A_2 D_x^{n-2} D_y^2 \,.\, z + \,..\, + A_n D_y^n \,.\, z = V,$$

wo die linke Seite eine homogene Function der n^{ten} Ordnung von D_x, D_y mit constanten Coefficienten, und V eine gegebene Function von x, y ist, die Form des Integrales zu finden.

Wenn $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ die Wurzeln der Gleichung:

$$u^n + A_1\, u^{n-1} + A_2 u^{n-2} + \ldots + A_n = 0 \qquad (\mu)$$

sind, so kann die vorhergehende Differentialgleichung offenbar auf die Form:

$$(D_x - a_1 D_y)\,(D_x - a_2 D_y) \,.\,.\,.\,.\,.\, (D_x - a_n D_y) \,.\, z = V$$

gebracht werden, deren Auflösung ist:

$$z = \frac{1}{(D_x - a_1 D_y)\ldots(D_x - a_n D_y)} \,.\, V + u_0(e^x, e^{-\frac{y}{a_1}}) + v_0(e^x, e^{-\frac{y}{a_2}}) + \&c.$$

wovon der arbiträre Theil auf die Form:

$$\Phi\left(x+\frac{y}{a_1}\right)+\Psi\left(x+\frac{y}{a_2}\right)+\&c.$$

gebracht werden kann. —

Wenn p der Wurzeln $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ einander gleich sind, so ist dieser willkürliche Theil im Allgemeinen:

$$\left(x-\frac{y}{a_1}\right)^{p-1}.u_0\left(e^x,e^{-\frac{y}{a_1}}\right)+\left(x-\frac{y}{a_1}\right)^{p-2}.v_0\left(e^x,e^{-\frac{y}{a_1}}\right)+\ldots$$
$$+w_0\left(e^x,e^{-\frac{y}{a_n}}\right).$$

und wenn die Gleichung (μ) Paare imaginärer Wurzeln hat; so ist der arbiträre Theil der Auflösung von der Form:

$$u_0(e^x, e^{-\frac{y}{(a_1+a_2\sqrt{-1})}})+v_0(e^x,e^{-\frac{y}{(a_1-a_2\sqrt{-1})}})+w_0(e^x, e^{-\frac{y}{a_3}})+\ldots$$

Fünftes Kapitel.

I. Integration von Systemen gleichzeitiger Differentialgleichungen.

1. Es sei das System gleichzeitiger Differentialgleichungen der ersten Ordnung mit n abhängigen Veränderlichen:

$$\left.\begin{array}{l} D_t x = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots \\ D_t y = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots \\ D_t z = a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots \\ \qquad \&c. \end{array}\right\}$$

zu integriren. — Multiplicirt man die erste mit λ, die zweite mit μ, die dritte mit ν, ꝛc. und addirt die Producte; so erhält man:

$$\lambda D_t x + \mu D_t y + \nu D_t z + \ldots = \left\{\begin{array}{c} (a_1\lambda + a_2\mu + a_3\nu + \ldots)\, x \\ + \\ (b_1\lambda + b_2\mu + b_3\nu + \ldots)\, y \\ + \\ (c_1\lambda + c_2\mu + c_3\nu + \ldots)\, z \\ + \&c. \end{array}\right.$$

Die eingeführten n willkürlichen Constanten können aber stets so angenommen werden, daß sie n Bedingungsgleichungen, z. B. den Gleichungen:

$$\begin{array}{c} a_1\lambda + a_2\mu + a_3\nu + \ldots = k\lambda, \\ b_1\lambda + b_2\mu + b_3\nu + \ldots = k\mu, \\ c_1\lambda + c_2\mu + c_3\nu + \ldots = k\nu, \\ \&c. \end{array}$$

genügen, wo k eine neue Constante ist. — Alsdann wird die vorhergehende Differentialgleichung auf die Form:

$$D_t(\lambda x + \mu y + \nu z + \ldots) = k\,(\lambda x + \mu y + \nu z + \ldots)$$

deren Auflösung ist:

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \ldots = Ce^{kt},$$

wo C eine willkürliche Constante bedeutet. —

In Bezug auf die Größe k ist zu bemerken: daß, wenn $(n-1)$ der Größen λ, μ, ν, ꝛc. zwischen den aufgestellten Bedingungsgleichungen eliminirt werden, die n^{te} dieser Größen von selbst verschwindet, so daß man eine Gleichung erhält, welche in Bezug auf k vom n^{ten} Grade ist und die bekannten Größen a_1, b_1, $c_1, \ldots$ enthält. — In der obigen Auflösung hat also k irgend einen von den n bekannten Werthen. —

Bildet man also die den verschiedenen Wurzeln k_1, k_2, $k_3, \ldots$ entsprechenden Auflösungen, so ist einleuchtend, daß die allgemeine Auflösung des obigen Systemes simultaner Differentialgleichungen ausgedrückt werden kann durch:

$$\left.\begin{array}{l} x = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} + C_3 e^{k_3 t} + \ldots + C_n e^{k_n t} \\ y = D_1 e^{k_1 t} + D_2 e^{k_2 t} + D_3 e^{k_3 t} + \ldots + D_n e^{k_n t} \\ z = E_1 e^{k_1 t} + E_2 e^{k_2 t} + E_3 e^{k_3 t} + \ldots + E_n e^{k_n t} \\ \qquad\qquad\qquad \text{\&c.} \end{array}\right\}$$

wo von den Constanten C_1, D_1, $E_1, \ldots$ blos n willkürlich sind. —

Wenn unter den Wurzeln k_1, k_2, $k_3, \ldots$ gleiche, oder imaginäre vorkommen, so müssen mit der allgemeinen Form der Auflösung die bekannten Modificationen vorgenommen werden. — Kommt z. B. ein Paar imaginärer Wurzeln vor, so wird die allgemeine Form der Auflösung:

$$\left.\begin{array}{l} x = e^{k_1 t} \, . \, C_1 \cos(k_2 t + C_2) + C_3 e^{k_3 t} + \ldots + C_n e^{k_n t} \\ y = e^{k_1 t} \, . \, D_1 \cos(k_2 t + D_2) + D_3 e^{k_3 t} + \ldots + D_n e^{k_n t} \\ z = e^{k_1 t} \, . \, E_1 \cos(k_2 t + E_2) + E_3 e^{k_3 t} + \ldots + E_n e^{k_n t} \\ \qquad\qquad\qquad \text{\&c.} \end{array}\right\}$$

Beispiele.

1. Die gegebenen Gleichungen seien:

$$\left.\begin{aligned} D_t x &= by \\ D_t y &= ax \end{aligned}\right\}$$

so ist die Auflösung:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} \\ y &= D_1 e^{k_1 t} + D_2 e^{k_2 t} \end{aligned}\right\}$$

wo k_1, k_2, die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind, welche durch Elinination von λ, μ zwischen den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a\mu &= k\lambda \\ b\lambda &= k\mu \end{aligned}\right\}, \text{ oder } \left\{\begin{aligned} k_1 &= +\sqrt{(ab)}, \\ k_2 &= -\sqrt{(ab)} \end{aligned}\right.$$

erhalten wird. Die Auflösung ist also:

$$x = C_1 e^{+\sqrt{(ab)}t} + C_2 e^{-\sqrt{(ab)}t},$$

$$y = C_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} e^{+\sqrt{(ab)}t} - C_2 \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{(ab)}t}.$$

2. Wenn die simultanen Differentialgleichungen folgende sind:

$$\left.\begin{aligned} D_t x &= a_1 x + b_1 y \\ D_t y &= a_2 x + b_2 y \end{aligned}\right\},$$

so ist die Auflösung:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} \\ y &= C_1 \left(\frac{k_1 - a_1}{b_1}\right) e^{k_1 t} + C_2 \left(\frac{k_2 - a_1}{b_1}\right) e^{k_2 t} \end{aligned}\right\},$$

wo k_1, k_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(k - a_1)(k - b_2) = b_1 a_2.$$

sind.

3. Es seien die 3 simultanen Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} D_t x &= \frac{dx}{dt} = b_1 y + c_1 z \\ D_t y &= \frac{dy}{dt} = a_2 x + c_2 z \\ D_t z &= \frac{dz}{dt} = a_3 x + b_3 y \end{aligned}\right\}$$

zur Integration gegeben, so ist die Auflösung:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} + C_3 e^{k_3 t} \\ y &= D_1 e^{k_1 t} + D_2 e^{k_2 t} + D_3 e^{k_3 t} \\ z &= E_1 e^{k_1 t} + E_2 e^{k_2 t} + E_3 e^{k_3 t} \end{aligned}\right\}$$

wo k_1, k_2, k_3 die Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$k^3 - (b_1 a_2 + c_1 a_3 + c_2 b_3) k - (c_2 b_1 a_3 + c_1 a_2 b_3) = 0$$

sind, welche sich durch die Elimination von λ, μ, ν zwischen den drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a_2\mu + a_3\nu &= k\lambda \\ b_1\lambda + b_3\nu &= k\mu \\ c_1\lambda + c_2\mu &= k\nu \end{aligned}\right\}$$

ergibt. — Es mag noch bemerkt werden: daß die linken Seiten der gegebenen Differentialgleichungen die rechtwinkligen Componenten der Geschwindigkeit eines materiellen Punktes ausdrücken, dessen Coordinaten in der anfänglichen Lage die in der obigen Auflösung vorkommenden drei willkürlichen Größen bestimmen. —

2. Offenbar ist ein ähnliches Integrationsverfahren auch auf ein System simultaner Differentialgleichungen der m^{ten} Ordnung:

$$\left.\begin{aligned} D_t^m x &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots \\ D_t^m y &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots \\ D_t^m z &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots \\ &\text{\&c.} \end{aligned}\right\}$$

anwendbar. — Die reducirte Gleichung ist in diesem Falle:

$$D_t^m(\lambda x + \mu y + \nu z + \ldots) = k^m (\lambda x + \mu y + \nu z + \ldots),$$

während die Bedingungsgleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} a_1\lambda + a_2\mu + a_3\nu + \ldots &= k^m\lambda \\ b_1\lambda + b_2\mu + b_3\nu + \ldots &= k^m\mu \\ c_1\lambda + c_2\mu + c_3\nu + \ldots &= k^m\nu \\ &\text{\&c.} \end{aligned}\right\}$$

und die Auflösung der reducirten Gleichung ist, wenn $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$ die n Wurzeln der Einheit bedeuten:

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \ldots = Ce^{\alpha kt} + C'e^{\alpha' kt} + C''e^{\alpha'' kt} + \ldots$$

Beispiel.

Das gegebene System zu integrirender simultaner Differentialgleichungen sei:

$$\left.\begin{aligned} D_t^2 x &= \frac{d^2x}{dt^2} = b_1 y + c_1 z \\ D_t^2 y &= \frac{d^2y}{dt^2} = a_2 x + c_2 z \\ D_t^2 z &= \frac{d^2z}{dt^2} = a_3 x + b_3 y \end{aligned}\right\}$$

deren linke Seiten die rechtwinkligen Componenten der in irgend einem Augenblicke auf einen materiellen Punkt wirkenden beschleunigenden Kraft ausdrücken. —

Die Bedingungsgleichungen sind in diesem Falle:

$$\left.\begin{aligned} a_2\mu + a_3\nu &= k^2\lambda \\ b_2\lambda + b_3\nu &= k^2\mu \\ c_1\lambda + c_2\mu &= k^2\nu \end{aligned}\right\};$$

die reducirte Gleichung ist:

$$D_t^2 (\lambda x + \mu y + \nu z) = k^2 (\lambda x + \mu y + \nu z),$$

und die Auflösung derselben:

$$\lambda x + \mu y + \nu z = Ce^{kt} + C'e^{-kt};$$

während man zur Bestimmung der Werthe von k die Gleichung:

$$k^6 - (b_1 a_2 + c_1 a_3 + c_2 b_3)k^2 - (c_2 b_1 a_3 + c_1 a_2 b_3) = 0$$

hat. —

Da diese letzte Gleichung vom 6^{ten} Grade ist, so könnte der Anfänger meinen: daß die vollständige Lösung des fraglichen Pro-

blemes aus 6 Gleichungen, jede mit 2 willkürlichen Constanten, bestehen werde. — Da jedoch die Wurzeln der letzten Gleichung von der Form:

$$\pm k_1, \pm k_2, \pm k_3$$

sind, und λ, μ, ν nur von k^2 abhängen, so reduciren sich diese 6 Gleichungen, wovon jede die Form:

$$\lambda x + \mu y + \nu z = Ce^{kt} + C'e^{-kt},$$

hat, auf 3, und man hat mithin nur 6 willkürliche Constanten, welche im Allgemeinen durch gegebene anfängliche Coordinaten und gegebene anfängliche Geschwindigkeiten bestimmt werden. Diese Bemerkung ist leicht auf den obigen allgemeinen Fall auszudehnen. —

3. Wenn die zur Integration vorgelegten gleichzeitigen Differentialgleichungen die Form:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 D^m_t x + b_1 D^m_t y + c_1 D^m_t z + \ldots = x \\ a_2 D^m_t x + b_2 D^m_t y + c_2 D^m_t z + \ldots = y \\ a_3 D^m_t x + b_3 D^m_t y + c_3 D^m_t z + \ldots = z \\ \quad \&c. \end{array}\right\}$$

hätten, so könnte ein ähnliches Verfahren angewandt werden. — Multiplicirt man nämlich diese Gleichungen resp. mit λ, μ, $\nu \ldots$, addirt die Producte, und setzt die Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3 + \ldots = \dfrac{\lambda}{k^m} \\ \lambda b_1 + \mu b_2 + \nu b_3 + \ldots = \dfrac{\mu}{k^m} \\ \lambda c_1 + \mu c_2 + \nu c_3 + \ldots = \dfrac{\nu}{k^m} \\ \quad \&c. \end{array}\right\}$$

fest; so ist die reducirte Gleichung wieder:

$$D^m_t (\lambda x + \mu y + \nu z + \ldots) = k^m (\lambda x + \mu y + \nu z + \ldots),$$

und ihre Auflösung ist:

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \ldots = Ce^{\alpha kt} + C'e^{\alpha' kt} + C''e^{\alpha'' kt} + \ldots$$

Es ist hierbei aber zu bemerken: daß die Werthe der Constanten, sowie die der Wurzeln der Gleichung mit k ganz andere sind, als in den vorhergehenden Nrn., wo eine ähnliche Bezeichnung angewandt ist. —

4. Das gegebene System zu integrirender simultaner Differentialgleichungen sei:

$$\left.\begin{aligned}\Phi(D)\,x + \Psi(D)\,y &= F_1(t)\\ \Phi(D)\,y - \Psi(D)\,x &= F_2(t)\end{aligned}\right\}$$

wo der Kürze wegen das Zeichen t an dem Differentionssymbole D weggelassen ist.

Operirt man an der ersten Gleichung mit $\Phi\,(D)$ und setzt aus der zweiten den Werth von $\Phi\,(D)y$ in das Resultat, so ergibt sich:

$$\Phi\,(D)^2\,.\,x + \Psi\,(D)\,.\,\{\Psi\,(D)\,x + F_2(t)\} = \Phi\,(D)\;\;F_1\,(t).$$

Werden nun die ausführbaren Operationen verrichtet, so läßt sich diese Gleichung offenbar auf die Form:

$$\{\Phi\,(D)^2\,. + \Psi\,(D)^2\,.\,\}\;x = F_3(t)$$

bringen, worin nur noch eine abhängige Veränderliche vorkommt.

Diese letzte Gleichung ist im Allgemeinen auflösbar, und nachdem der Werth von x gefunden ist, ergibt sich der von y durch Substitution in eine der gegebenen Gleichungen. —

Beispiel.

Die gegebenen Gleichungen seien:

$$(a_0 + a_2D^2 + a_4D_4{}^4)\;x + (a_1D + a_3D^3)\;y = m\sin nt,$$
$$(a_0 + a_2D^2 + a_4D^4)\;y - (a_1D + a_3D^3)\;x = m\cos nt.$$

so ist:

$$x = +\Sigma(A\cos\lambda^{\frac{1}{2}}t + B\sin\lambda^{\frac{1}{2}}\,t) + \frac{m\sin nt}{a_0 - a_1n - a_2n^2 + a_3n^3 + a_4\,n^4},$$

$$y = -\Sigma(A\sin\lambda^{\frac{1}{2}}\,t - B\cos\lambda^{\frac{1}{2}}\,t) + \frac{m\cos nt}{a_0 - a_1n - a_2n^2 + a_3n^3 + a_4\,n^4},$$

wo λ alle Werthe bekommen muß, welche der Gleichung:

$$(a_0 - a_2\lambda + a_4\lambda^2)^2 - \lambda\,(a_1 - a_3\lambda)^2 = 0$$

genügen. —

5. Der Operationscalcul kann auch in einigen Fällen zur Integration gleichzeitiger partieller Differentialgleichungen mit Vortheil angewandt werden — und die Resultate haben alsdann eine sehr merkwürdige symmetrische Form. — Ist z. B. das System von partiellen Differentialgleichungen gegeben:

$$\left.\begin{aligned} D_x^2\,.\,z &= r = f_1(x,y) \\ D_x D_y\,.\,z &= s = f_2(x,y) \\ D_y^2\,.\,z &= t = f_3(x,y) \end{aligned}\right\}$$

so ergibt sich, wenn man dieselben resp. mit x^2, $2xy$, y^2 multiplicirt nnd die Producte addirt:

$$x^2 D_x^2\,.\,z + 2xy D_x D_y\,.\,z + y^2 D_y^2\,.\,z = x^2 f_1 + 2xy f_2 + y^2 f_3.$$

Wird alsdann die rechte Seite dieser letzten Gleichheit wieder in homogene Functionen zerlegt, so erhält man:

$$\nabla(\nabla - 1)\,z = \Theta_m + \Theta_n + \Theta_p + \text{\&c.},$$

und die gesuchte Auflösung ist:

$$z = \frac{\Theta_m}{m\,(m-1)} + \frac{\Theta_n}{n\,(n-1)} + \text{\&c} + u_0 + u_1,$$

wo u_0, u_1 homogene Functionen von x, y von den resp. Graden 0 und 1 sind. —

Die sich zunächst zur Integration eines solchen Systemes von Differentialgleichungen darbietende Methode besteht darin: daß man die erste Gleichung zweimal nach x integrirt, indem man y als constant ansieht, wodurch zwei arbiträre Functionen von y eingeführt werden, dann die zweite Gleichung successive in Bezug auf x und y, wodurch noch zwei willkürliche Functionen, die eine von y und die andere von x eingeführt werden; ferner die dritte Gleichung zweimal nach y, wodurch wieder zwei arbiträre Functio-

nen von x eingeführt werden, und endlich durch Vergleichung der so erhaltenen Resultate die Beschaffenheit der resultirenden willkürlichen Functionen so viel als möglich bestimmt. —

Offenbar ist unsere Methode auf das System:

$$\left.\begin{aligned} D^2_\varphi \,.\, z &= f_1(e^\varphi, e^\psi, \sin\varphi, \sin\psi, \cos\varphi, \cos\psi) \\ D_\varphi D_\psi \,.\, z &= f_2(e^\varphi, e^\psi, \sin\varphi, \sin\psi, \cos\varphi, \cos\psi) \\ D^2_\psi \,.\, z &= f_3(e^\varphi, e^\psi, \sin\varphi, \sin\psi, \cos\varphi, \cos\psi) \end{aligned}\right\}$$

anwendbar, indem die Functionen f_1, f_2, f_3 einzeln auf die Form:

$$\Sigma A_{m,n}\, e^{m\varphi + n\psi}$$

gebracht werden. —

Es ist noch zu bemerken: daß durch die Bedingungen der obigen Untersuchung nothwendig eine Beschränkung in Bezug auf die Form der arbiträren Functionen eingeführt wird. — Und in der That ist einleuchtend: daß diese Functionen keine negativen Potenzen der independenten Veränderlichen enthalten dürfen, weil sonst, obgleich das Resultat der Aggregation der partiellen Differentialgleichungen noch richtig gelös't sein kann, eine solche Auflösung den einzelnen Gleichungen doch nicht genügt. —

6. Wenn aus der Gleichung:

$$xF_1(z) + yF_2(z) = 1,$$

die willkürlichen Functionen eliminirt werden sollen, so wird bekanntlich das Resultat erhalten, wenn man die Gleichung zweimal resp. nach x und y differenzirt. — Die erste Differentiation gibt:

$$\left.\begin{aligned} F_1(z) + \{xF'_1(z) + yF'_2(z)\} \,.\, D_x z &= 0 \\ F_2(z) + \{xF'_1(x) + yF'_2(z)\} \,.\, D_y z &= 0 \end{aligned}\right\},$$

woraus durch Division folgt:

$$\frac{F'_1(z)}{F'_2(z)} = f(z) = \frac{p}{q} = \frac{D_x z}{D_y z},$$

und die zweite Differentiation gibt:

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0,$$

oder:

$$(D_y z)^2 . D_x^2 z - 2D_x z . D_y z . D_x D_y z + (D_x z)^2 . D_y^2 z = 0,$$

d. h. die partielle Differentialgleichung der windschiefen Fläche, welche durch eine Gerade erzeugt wird, die auf zwei festen Richt- oder Leitlinien so fortgleitet, daß sie stets zu der Ebene der $x\ y$ parallel bleibt. —

Ebenso erhellet: daß für ein System von $\frac{p(p-1)}{1.2}$ gleichzeitigen partiellen Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}(D_y w)^2 . D_x^2 w - 2D_x w . D_y w . D_x D_y w + (D_x w)^2 . D_y^2 w = 0 \\ (D_x w)^2 . D_z^2 w - 2D_z w . D_x w . D_z D_x w + (D_z w)^2 . D_x^2 w = 0 \\ (D_z w)^2 . D_y^2 w - 2D_y w . D_z w . D_y D_z w + (D_y w)^2 . D_z^2 w = 0 \\ \text{\&c.}\end{array}\right\}$$

die Auflösung ist:

$$\left.\begin{array}{l} x f_1 (w, z, \text{\&c.}) + y f_2 (w, z, \text{\&c.}) + \ldots = 1 \\ z f_{1'} (w, y, \text{\&c.}) + x f_{2'} (w, y, \text{\&c.}) + \ldots = 1 \\ y f_{1''} (w, x, \text{\&c.}) + z f_{2''} (w, x, \text{\&c.}) + \ldots = 1 \\ \text{\&c.}\end{array}\right\}$$

und aus der Vergleichung dieser Resultate ergibt sich als Endauflösung:

$$x F_1 (w) + y F_2 (w) + z F_3 (w) + \text{\&c.} = 1,$$

mit blos p arbiträren Functionen. —

7. Es sei das System von Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} D_t^2 u = \dfrac{d^2 u}{dt^2} = a^2 D_x (D_x u + D_y v + D_z w) \\ D_t^2 v = \dfrac{d^2 v}{dt^2} = a^2 D_y (D_x u + D_y v + D_z w) \\ D_t^2 w = \dfrac{d^2 w}{dt^2} = a^2 D_z (D_x u + D_y v + D_z w) \end{array}\right\}$$

zu integriren, wodurch die kleinen Bewegungen homogener elastischer Flüssigkeiten bestimmt werden. Setzt man:

$$D_x u + D_y v + D_z w = V,$$

differentiirt die erste dieser Gleichungen nach x, die zweite nach y, die dritte nach z und addirt die Resultate; so ergibt sich:

$$D_t^2\, V = a^2\,(D_x^2 V + D_y^2\, V + D_z^2 V),$$

wovon das Integral ist:

$$V = e^{at(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)^{\frac{1}{2}}}\,.\,\Phi\,(x, y, z) + e^{-at\,(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)^{\frac{1}{2}}}\,.\,\Psi\,(x, y, z),$$

welches Poisson (Mémoires de l'Institut, 1818), in folgender Form:

$$4\pi\, V =$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\varphi(x + at\cos\theta, y + at\sin\theta\cos\varphi, z + at\sin\theta\sin\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi +$$

$$D_t \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\psi\,(x + at\cos\theta, y + at\sin\theta\cos\varphi, z + at\sin\theta\sin\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi.$$

angegeben hat. — Nachdem der Werth von V gefunden ist, werden u, v, w durch Substitution desselben in die gegebenen Gleichungen erhalten.

8. Wenn das System der Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} D_t^2 u &= PD_x\,(D_x u + D_y v + D_z w) + Q\,(D_x^2 u + D_y^2 u + D_z^2 u) \\ D_t^2 v &= PD_y\,(D_x u + D_y v + D_z w) + Q\,(D_x^2 v + D_y^2 v + D_z^2 v) \\ D_t^2 w &= PD_z\,(D_x u + D_y v + D_z w) + Q\,(D_x^2 w + D_y^2 w + D_z^2 w) \end{aligned}\right\}$$

zu integriren wäre, wodurch die kleinen Bewegungen homogener elastischer fester Körper oder homogener incompressibeler Flüssigkeiten ausgedrückt werden, wo P und Q Constanten sind; so kann man auf eine ähnliche Weise verfahren. — Wird nämlich die erste Gleichung nach x, die zweite nach y, die dritte nach z differentiirt, und werden die Resultate addirt; so ergibt sich:

$$D_t^2 V = P\,(D_x^2 V + D_y^2 V + D_z^2 V) + Q\,(D_x^2 V + D_y^2 V + D_z^2 V)$$

oder:

$$D_t^2 V = (P + Q)\,(D_x^2 V + D_y^2 V + D_z^2 V),$$

wovon die Auflösung eben angegeben ist. —

9. Das zu integrirende System sei:

$$\left.\begin{aligned} AD_t p + (C - B)\,qr &= A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = 0 \\ BD_t q + (A - C)\,rp &= B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp = 0 \\ CD_t r + (B - A)\,pq &= C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq = 0 \end{aligned}\right\}$$

wodurch bekanntlich die Relation zwischen der Winkelgeschwindigkeit der momentanen Drehung eines um seinen Schwerpunkt rotirenden, keiner Wirkung von irgend welchen Kräften unterworfenen festen Körpers und der Zeit bestimmt wird, indem A, B, C die drei Hauptträgheitsmomente bedeuten. —

Werden diese Gleichungen resp. mit p, q, r multiplicirt, die Producte addirt und das Resultat integrirt; so ergibt sich die constante Größe:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = V,$$

welche bekanntlich die lebendige Kraft des Körpers ausdrückt.

Wenn man dagegen die gegebenen Gleichungen resp. mit Ap, Bq, Cr multiplicirt, die Producte addirt und das Resultat integrirt; so erhält man die constante Größe:

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = M^2,$$

welche bekanntlich das Hauptmoment der Quantität der Bewegung ausdrückt. —

Bezeichnet nun ω die Winkelgeschwindigkeit der augenblicklichen Drehung, und werden die Werthe von p^2, q^2, r^2 aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= V \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 &= M^2 \\ p^2 + q^2 + r^2 &= \omega^2 \end{aligned}\right\}$$

bestimmt; so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} p^2 &= \frac{M^2-(B+C)\,V+BC\omega^2}{(C-A)\,(B-A)} \\ q^2 &= \frac{M^2-(C+A)\,V+CA\omega^2}{(A-B)\,(C-B)} \\ r^2 &= \frac{M^2-(A+B)\,V+AB\omega^2}{(B-C)\,(A-C)} \end{aligned}\right\}$$

und wenn diese Werthe in irgend eine der gegebenen Gleichungen gesetzt werden; so erhält man die Relation:

$$dt = \frac{ABC\,.\,\omega d\omega}{\{(B+C)V-BC\omega^2-M^2\}^{\frac{1}{2}}\,.\,\{(C+A)V-CA\omega^2-M^2\}^{\frac{1}{2}}\,.\,\{(A+B)V-AB\omega^2-M^2\}^{\frac{1}{2}}}.$$

10. Es sei das System von Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} D_t^2u - D_uR &= \frac{d^2u}{dt^2} - \frac{dR}{du} = 0 \\ D_t^2v - D_vR &= \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{dR}{dv} = 0 \\ D_t^2w - D_wR &= \frac{d^2w}{dt^2} - \frac{dR}{dw} = 0 \\ &\text{\&c.,} \end{aligned}\right\}$$

mit den n Veränderlichen $u, v, w, \ldots$ zu integriren, wo R eine Function von r, und:

$$r = (u^2+v^2+w^2+\ldots)^{\frac{1}{2}}.$$

ist; so kann dasselbe offenbar auf die Form:

$$\left.\begin{aligned} D_t^2u - D_rR\,.\,\frac{u}{r} &= 0 \\ D_t^2v - D_rR\,.\,\frac{v}{r} &= 0 \\ D_t^2w - D_rR\,.\,\frac{w}{r} &= 0 \\ &\text{\&c.} \end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)$$

gebracht werden. — Eliminirt man nun D_rR zwischen je zwei

dieser letzten Gleichungen, und integrirt die entsprechenden Resultate; so erhält man $\frac{n(n-1)}{2}$ erste Integrale:

$$\left.\begin{array}{c} vD_t u - uD_t v = C_1 \\ uD_t w - wD_t u = C_2 \\ wD_t v - vD_t w = C_3 \\ \&c. \end{array}\right\} \quad (\alpha)$$

Multiplicirt man dagegen die gegebenen Gleichungen resp. mit $2D_t u$, $2D_t v$, $2D_t w$, ..., addirt die Producte und integrirt das Resultat; so ergibt sich:

$$(D_t u)^2 + (D_t v)^2 + (D_t w)^2 + \&c. = 2(R + A),$$

wo A eine Constante bedeutet. —

Werden aber die Gleichungen (α) einzeln zum Quadrate erhoben, und diese Quadrate zusammenaddirt; so erhält man:

$$(u^2+v^2+\&c.)\{(D_t u)^2+(D_t v)^2+\&c.\}-(uD_t u+vD_t v+\&c.)^2=B^2.$$

Folglich ist:

$$(D_t r)^2 = 2(R + V) - \frac{C^2}{r^2},$$

und mithin:

$$dt = \frac{rdr}{\{2r^2(R+A) - B^2\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Wenn man ferner D, R zwischen dieser Gleichung und der ersten der Gleichungen (γ) eliminirt, so erhält man:

$$rD_t^2 u - uD_t^2 r + \frac{B^2}{r^2} \cdot \frac{u}{r} = 0,$$

oder:

$$\left(\frac{r^2}{B} D_t\right)^2 \cdot \frac{u}{r} + \frac{u}{r} = 0,$$

und wenn φ eine durch die Gleichung:

$$d\varphi = \frac{Bdt}{r^2} = \frac{Bdr}{r\{2r^2(R+A) - B^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

bestimmte Größe ist; so erhält man für das gesuchte System der zweiten Integrale:

$$\left.\begin{aligned} u &= r\,(g_1 \cos\varphi + h_1 \sin\varphi) \\ v &= r\,(g_2 \cos\varphi + h_2 \sin\varphi) \\ w &= r\,(g_3 \cos\varphi + h_3 \sin\varphi) \\ &\text{\&c.} \\ \varphi + \beta &= \int \frac{B\,dr}{r\{2r^2(R+A) - B^2\}^{\frac{1}{2}}} \\ t + \alpha &= \int \frac{r\,dr}{\{2r^2(R+A) - B^2\}^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\}$$

woraus sich φ als Function von r, und r als Function von $t + \alpha$ und mithin φ als Function von $t + \alpha$ ergibt, so daß man endlich $u, v, w, \ldots$ als Functionen von $t, \alpha, \beta, A, B, g_1, h_1, \ldots$ erhält. Es ist leicht einzusehen: daß die Gesammtzahl der willkürlichen Constanten $= 2n + 4$ ist; aber da β blos auf $g_1, h_1 \ldots$ Einfluß hat, so kann sie hinweggelassen werden. — Wird ferner jede Gleichung der ersten Abtheilung der letzten Resultate zum Quadrate erhoben, und die Summe dieser Quadrate gebildet; so ergibt sich die Gleichung:

$$1 = \cos^2\varphi\, \Sigma(g^2) + 2 \sin\varphi \cos\varphi\, \Sigma(gh) + \sin^2\varphi\, \Sigma(h^2),$$

welche bei jedem Werthe von φ nur stattfinden kann, wenn die Bedingungen:

$$\Sigma(g^2) = 1, \quad \Sigma(gh) = 0, \quad \Sigma(h^2) = 1,$$

erfüllt werden, und es ist klar: daß nicht mehr als $2n$ independente willkürliche Constanten vorkommen können. —

Die Integrale, wodurch t und φ bestimmt werden, sind nicht unabhängig von einandrr; denn setzt man:

$$S = \int \frac{dr}{r} \{2r^2(R + A) - B^2\}^{\frac{1}{2}},$$

so sieht man leicht ein, daß:

$$t + \alpha = \frac{dS}{dA}, \quad \varphi + \beta = -\frac{dS}{dB}.$$

ist. —

11. Es seien die beiden Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} AD_x u + BD_y u + CD_z u = E \\ A'D_x u + B'D_y u + C'D_z u = E' \end{array}\right\}$$

wo A, A', B, B' Constanten sind, zu integriren.

Wenn diese Gleichungen einzeln integrirt werden, so ergibt sich:

$$u = \frac{E}{3}\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C}\right) + v_0\left(e^{\frac{x}{A}}, e^{\frac{y}{B}}, e^{\frac{z}{C}}\right),$$

$$u = \frac{E'}{3}\left(\frac{x}{A'} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{C'}\right) + w_0\left(e^{\frac{x}{A'}}, e^{\frac{y}{B'}}, e^{\frac{z}{C'}}\right),$$

und das gesuchte Resultat wird durch Indentification dieser beiden Integrale erhalten. — Nun können dieselben aber auf die Form:

$$u = \frac{F}{3}\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C}\right) + \Phi\left\{\frac{y}{B} - \frac{z}{C}, \frac{z}{C} - \frac{x}{A}, \frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right\},$$

$$u = \frac{E'}{3}\left(\frac{x}{A'} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{C'}\right) + \Psi\left\{\frac{y}{B'} - \frac{z}{C'}, \frac{z}{C'} - \frac{x}{C'}, \frac{x}{A'} - \frac{y}{B'}\right\}.$$

gebracht werden — und aus der Vergleichung beider erhellet: daß die Form von φ und ψ eine lineare sein muß; d. h. die letzten beiden Gleichungen können auf die Form:

$$u = \frac{E}{3}\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C}\right) + l\left(\frac{y}{B} - \frac{z}{C}\right) + m\left(\frac{z}{C} - \frac{x}{A}\right) + n\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right) + \alpha,$$

$$u = \frac{E'}{3}\left(\frac{x}{A'} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{C'}\right) + l'\left(\frac{y}{B'} - \frac{z}{C'}\right) + m'\left(\frac{z}{C'} - \frac{x}{A'}\right) + n'\left(\frac{x}{A'} - \frac{y}{B'}\right) + \beta,$$

gebracht werden, wo l, l', m, m', ... unbekannte Constanten sind, und beide Auflösungen sind identisch, wenn man hat:

$$\frac{E}{A} + 3\,\frac{n-m}{A} = \frac{E'}{A'} + 3\,\frac{n'-m'}{A'},$$

$$\frac{E}{B} + 3\,\frac{l-n}{B} = \frac{E'}{B'} + 3\,\frac{l'-n'}{B'},$$

$$\frac{E}{C} + 3\,\frac{m-l}{C} = \frac{E'}{C'} + 3\,\frac{m'-l'}{C'},$$

$$\alpha = \beta.$$

12. Das zu integrirende System von Differentialgleichungen sei:

$$\left.\begin{aligned} D_x^2 A + 2p D_x D_z A + p^2 D_z^2 A = 0 \\ D_x D_y A + p D_y D_z A + q D_x D_z A + pq D_z^2 A = 0 \\ D_y^2 A + 2q D_y D_z A + q^2 D_z^2 A = 0, \end{aligned}\right\}$$

wo A eine Function von x, y, z, p, q ist, und der Kürze wegen $p = \frac{dz}{dx}$ und $q = \frac{dz}{dy}$ gesetzt ist.

Diese Gleichungen können auf die Form:

$$(D_x + pD_z)^2 \,.\, A = 0$$
$$(D_x + pD_z)(D_y + qD_z) \,.\, A = 0$$
$$(D_y + qD_z)^2 \; A = 0,$$

gebracht werden, wenn p, q als zwei independente Veränderliche betrachtet werden, also nur in Bezug auf sich selbst differentiirt werden kann. —

Die Integration der einzelnen Gleichungen gibt:

$$A = \left(x + \frac{z}{p}\right) \varphi_1 (z - px, p, q, y) + \psi_1 (z - px, p, q, y),$$

$$A = \varphi_2 (z - px, p, q, y) + \psi_2 (z - qy, p, q, x),$$

$$A = \left(y + \frac{z}{q}\right) \varphi_3 (z - qy, p, q, x) + \psi_3 (z - py, p, q, x),$$

und durch Indentificirung dieser Resultate erhält man endlich:

$$A = \left\{ \begin{aligned} & x\Phi (z - px - qy, p, q) + yX (z - px - qy, p, q) \\ & \quad + \Psi (z - px - qy, p, q). \end{aligned} \right.$$

13. Das System der zu integrirenden Differentialgleichungen sei:

$$D_x^2 A + 2p D_x D_z A + p D_z^2 A = -\frac{1+p^2}{1(+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$D_x D_y A + p D_y D_z A + q D_x D_z A + pq D_z^2 A = -\frac{pq}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$D_y^2 A + 2q D_y D_z A + q^2 D_z^2 A = -\frac{1+q^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wenn man setzt:

$$(D_x + pD_z)\, A = (D_x A) = u, \quad (D_y + qD_z)\, A = D_y A) = v,$$

so wird die erste und letzte dieser Gleichungen resp. auf die Form:

$$(D_x + pD_z)\, u = (D_x u) = -\frac{1+p^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$D(_y + qD_z)\, v = (D_y v) = -\frac{1+q^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

gebracht, woraus sich durch Integration ergibt:

$$u = -\frac{(1+p^2)x}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} + \varphi\,(z - px, p, q, y),$$

$$v = -\frac{(1+q^2)y}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} + \psi\,(z - qy, p\cdot q, x).$$

Multiplicirt man diese Resultate resp. mit dx, dy, integrirt dann, und beachtet die zweite der gegebenen Gleichungen; so erhält man endlich:

$$A = -\tfrac{1}{2}\, \frac{\{x^2 + y^2 + (px + qy)^2\}}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} + x\Phi + y\,X + \Psi,$$

wo Φ, X und Ψ die Functionen in dem letzten Beispiele sind. —

14. Das System der zu integrirenden Differentialgleichungen sei:

$$\left.\begin{aligned} D_t^2 x &= \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gx'}{r+l} + N\frac{(x'-x)}{l} \\ D_t^2 y &= \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{gy'}{r+l} + N\frac{(y'-y)}{l} \\ D_t^2 z &= \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{gz'}{r+l} + N\frac{(z'-z)}{l}, \end{aligned}\right\}$$

wodurch die Azimuthalbewegung der Schwingungsebene eines frei aufgehangenen Pendels bestimmt wird, indem der Mittelpunkt der Erde der Anfangspunkt der Coordinaten, der nach Oben gerichtete Theil der Rotationsaxe der Erde die positive Axe der z, die positive Axe der y gegen den Beobachter gerichtet ist, die der x zu seiner Rechten liegt, x, y, z die Coordinaten des Schwingungsmittelpunktes des Pendels, x', y', z' die Coordinaten des Aufhängungspunktes, g die Anziehung der Erde, l die Länge des Pendels, r den Erdhalbmesser und N die Spannung des Fadens bedeuten.

Durch eine Coordinatenverwandlung, wobei der Aufhängungspunkt des Pendels der Anfangspunkt, die Axe der positiven z vertical abwärts, die der positiven x in der Horizontalebene nach Osten und die der y in derselben Ebene nach Norden gerichtet ist, gehen diese Gleichungen in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} D_t^2 x + \frac{Nx}{l} &= +2k\sin\lambda D_t y + 2k\cos\lambda D_t z + k^2 x \\ D_t^2 y + \frac{Ny}{l} &= -k^2 r\cos\lambda\sin\lambda - 2k\sin\lambda D_t x + k^2\sin\lambda(y\sin\lambda + z\cos\lambda) \\ D_t^2 z + \frac{Nz}{l} &= -k^2 r\cos^2\lambda + g - 2k\cos\lambda D_t x + k^2\cos\lambda(y\sin\lambda + z\cos\lambda) \end{aligned}\right\}$$

wo λ die geographische Breite des Beobachtungsortes ist. —

Oder wenn die Coordinataxen auf die Verticale und dem Horizont des wirklichen Erdsphäroids zurückgeführt werden:

$$\left.\begin{aligned} D_t^2 x + \frac{Nx}{l} &= +2k\sin\lambda D_t y + 2k\cos\lambda D_t z + k^2 x \\ D_t^2 y + \frac{Ny}{l} &= -2k\sin\lambda D_t x + k^2\sin\lambda(y\sin\lambda + z\cos\lambda) \\ D_t z + \frac{Nz}{l} &= g - 2k\cos\lambda D_t x + k^2\cos\lambda(y\sin\lambda + z\cos\lambda). \end{aligned}\right\}$$

Werden die Glieder mit k^2 hinweggelassen, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} D_t^2x + \frac{Nx}{l} &= \quad + 2k \sin\lambda\, D_ty + 2k\cos\lambda\, D_tz \\ D_t^2y + \frac{Ny}{l} &= \quad - 2k \sin\lambda\, D_tx \\ D_t^2z + \frac{Nz}{l} &= g - 2k\cos\lambda\, D_tx. \end{aligned}\right\}$$

Durch Elimination von N zwischen den beiden ersten dieser Gleichungen ergibt sich:

$$(yD_t^2x - xD_t^2y) = 2k\sin\lambda\,(yD_ty + xD_tx) + 2k\cos\lambda\, yD_tz.$$

Integrirt man diese Gleichung, so erhält man;

$$yD_tx - xD_ty = k\sin\lambda\,(x^2 + y^2) + 2\cos\lambda \int ydz,$$

und wenn man mittelst der bekannten Formeln:

$$x = l\sin\varphi\sin\theta,$$
$$y = l\cos\varphi\sin\theta,$$
$$z = l\cos\theta$$

diese letzte Gleichung in Polarcoordinaten transformirt, wo φ das vom Nordpunkte ausgezählte Azimuth, und θ die Ablenkung des Pendels aus der Verticale bezeichnet; so findet man:

$$D_t\varphi = \frac{d\varphi}{dt} = k\sin\lambda - \frac{2k\cos\lambda}{\sin\theta}\int\cos\varphi\sin^2\theta d\theta. \qquad (\alpha)$$

Aus dieser Gleichung erhellet: daß die Azimuthalgeschwindigkeit der Schwingungsebene des Pendels aus zwei Theilen besteht, wovon der eine $k\sin\lambda$ constant und von Norden nach Osten gerichtet ist, während der andere Theil periodisch ist, innerhalb der Dauer einer Pendelschwingung alle seine Größenzustände durchläuft und von der Schwingungsamplitude θ abhängt. Da das Azimuth φ während einer Schwingungsdauer als constant angesehen werden kann, so läßt sich das zweite Glied auf der rechten Seite der Gleichung (α) integriren, wodurch man erhält:

$$D_t\varphi = \frac{d\varphi}{dt} = k\sin\lambda - \tfrac{2}{3}k\cos\lambda\cos\varphi\,.\,\theta,$$

indem die höhern Potenzen der Amplitude θ wegen ihrer Kleinheit weggelassen werden und θ während einer Schwingung zweimal verschwindet. —

Aus der letzten Gleichung erhellet: daß das Azimuth der Schwingungsebene des Pendels einer periodischen Aenderung unterliegt, in Folge welcher die Projection des Schwingungsmittelpunktes des Pendels auf die Horizontalebene eine Curve beschreibt, welche der Ziffer 8 ähnlich ist — und zwar ist die Bewegung, wenn sich das Pendel im Meridian befindet, in dem nördlichen Theile dieser Curve eine retrograde, nnd in dem südlichen Theile derselben eine progressive. —

Die von dem zweiten Gliede der Gleichung (α) herrührende Variation des Azimuthes der Schwingungsebene ist unmerklich, so lange nicht nahezu $\theta = \pi$ wird, in welchem letzten Falle sie unendlich groß ist. — Denn integrirt man diese Gleichung, so findet man, wenn die anfängliche Schwingnng des Pendels im Meridian stattfindet:

$$D_t\varphi = \frac{d\varphi}{dt} = k \sin\lambda - k\cos\lambda \; \frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

und wenn in dieser Gleichung $\theta = \pi$ ist; so wird das zweite Glied der rechten Seite $= -\infty$; d. h. die Schwingungsebene kehrt sich plötzlich gegen Westen. — Dieses ist auch ohne Rechnung einleuchtend; denn wenn das Pendel im Meridian so angestoßen wird, daß es durch den tiefsten Punkt mit der seiner doppelten Länge entsprechenden Fallgeschwindigkeit geht, so erreicht es den höchsten Punkt seines Schwingungskreises ohne Geschwindigkeit und geht auf die westliche Seite über. —

Wenn das Pendel mit einer sehr großen Geschwindigkeit ganze Umläufe machte, so würde sich die Zeit einer ganzen Azimuthaldrehung seiner Schwingungsebene der Grenze $23^h\ 56^m$ desto mehr nähern, je größer seine Geschwindigkeit würde. Aber wenn das Pendel blos schwingende Bewegungen macht, so wird die Zeit

einer ganzen Azimuthalumdrehung seiner Schwingungsebene für kleine Schwingungen nach Binet's Untersuchung (Comptes rendus de l'Academ. des Sciences, Feb. 17, 1851) durch:

$$23^h\ 56^m \,.\, \text{cosec}\, \lambda$$

ausgedrückt. —

II. Ermittelung und Verallgemeinerung bestimmter Integrale.

15. Der Operationscalcul ist offenbar auch auf die Lehre von den ein- und vielfachen bestimmten Integralen anwendbar — und es eröffnet sich dem Lernenden hier ein weites und interessantes Feld von Untersuchungen, worüber wir hier jedoch nicht ausführlich ins Detail eingehen können, sondern uns auf der Erörterung einiger allgemeiner Theoreme und deren Anwendung auf verschiedene Beispiele beschränken müssen. —

16. Wenn Φ und Ψ irgend welche algebraische Functionen bedeuten, so ist nach Kap. 2, Nr. 8:

$$\Psi(D_x) \,.\, \Phi(x) \,.\, e^{rx} = \Phi(D_r) \,.\, \Psi(r) \,.\, e^{rx},$$

und wenn $-r$ statt r gesetzt wird:

$$\Phi(-D_r) \,.\, \Psi(-r) \,.\, e^{-rx} = \Psi(D_x) \,.\, \Phi(x) \,.\, e^{-rx}.$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$\int_0^\infty dx \sin mx\, e^{-rx} = \frac{m}{m^2 + r^2},$$

und wenn man auf beiden Seiten mit:

$$\Phi(-D_r) \,.\, \Psi(-r)$$

operirt:

$$\int_0^\infty dx \sin mx \,.\, \Psi(D_x) \,.\, \Phi(x)\, e^{-rx} = \Phi(-D_r) \frac{m\Psi(-r)}{m^2 + r^2}.$$

Auf ähnliche Weise ergibt sich:

$$\int_0^\infty dx \cos mx \,.\, \Psi(D_x) \,.\, \Phi(x)\, e^{-rx} = \Phi(-D_r) \frac{r\Psi(-r)}{m^2 + r^2}.$$

17. Wenn man hat:

$$\int dx \int dy \int dz \,..\, \Omega(x, y, z, \&c.) \,.\, a^{\varphi(xyz\&c.)} \,.\, b^{\chi(xyz\&c.)} \,.\, c^{\psi(xyz\&c.)} \,.. = K$$

wo $a, b, c, \ldots$ von den Integrationsgrenzen unabhängig sind; so ist:

$$\int dx \int dy \int dz \,..\, \Omega(x,y,z,\&c.) F(\varphi+\chi+\psi+\&c.) \,.\, a^{\varphi} . b^{\chi} . c^{\psi} \,.. = F(\nabla) . K,$$

wo:

$$\nabla = aD_a + bD_b + cD_c + \&c.$$

ist, weil man bei der in Bezug auf $a, b, c, \ldots$ gemachten Voraussetzung offenbar mit dem Symbole ∇ unter den Integralzeichen operiren darf. — Man bemerkt leicht, daß das vorhergehende Resultat mit Liouville's bekannter Erweiterung von Dirichlet's Integral Aehnlichkeit hat. —

Umgekehrt, wenn der Werth des vielfachen bestimmten Integrales:

$$\int dx \int dy \int dz \ldots \Omega(x,y,z,\&c.) \,.\, F(\varphi + \chi + \psi + \&c.) \,.\, a^{\varphi} . b^{\chi} . c^{\psi} \ldots$$

gesucht wird, wo $a, b, c, \ldots$ von den Integrationsgrenzen unabhängig sind; so läßt sich diese Aufgabe auf die Bestimmung des Werthes des einfachern bestimmten Integrales:

$$\int dx dy \int dz \ldots \Omega(x, y, z) \,.\, a^{\varphi}, b^{\chi}, c^{\psi} \ldots$$

und darauf folgende Operation mit dem Symbol $F(\nabla)$, wo ∇ die obige Bedeutung hat, zurückführen. —

Beispiele.

1. Es läßt sich leicht zeigen, daß:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty dz \,.\, a^{-x^2} . b^{-y^2} . c^{-z^2} = \frac{1}{8} \pi^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\{\log a . \log b . \log c\}^{\frac{1}{2}}}$$

ist; folglich:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty dz \,.\, \mathrm{F}(x^2 + y^2 + z^2) \, a^{-x^2} . b^{-y^2} . c^{-z^2}$$

$$= \frac{1}{8} \pi^{\frac{3}{2}} . \mathrm{F}(-\nabla) \frac{1}{\{\log a \,.\, \log b \,.\, \log c\}^{\frac{1}{2}}} .$$

Umgekehrt, die Werthsbestimmung von:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty dz \,.\, F(x^2+y^2+z^2) a^{-x^2} b^{-y^2} \,.\, c^{-z^2}$$

ist auf die des Werthes von:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty dz \,.\, a^{-x^2} \,.\, b^{-y^2} \,.\, c^{-z^2},$$

welcher bekanntlich gleich:

$$\frac{1}{8}\pi^{\frac{3}{2}} \; \frac{1}{\{\log a \,.\, \log b \,.\, \log c\}^{\frac{1}{2}}}$$

ist, und auf die Operation mit $F(-\nabla)$ an diesem Werthe zurückgeführt. —

2. Man sieht ferner leicht ein, daß:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty dz \,.\, a^{-px} \,.\, b^{-qy} \,.\, c^{-rz} \,.\, x^{l-1} \,.\, y^{m-1} \,.\, z^{n-1}$$

$$= \frac{\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(n)}{p^l q^m r^n} \cdot \frac{1}{(\log a)^l \,.\, \log b)^m \,.\, (\log c)^n}$$

ist, und folglich:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty dz \,.\, \Phi(px+qy+rz)\, a^{-px} \,.\, b^{-qy} . c^{-rz} \,.\, x^{l-1} \,.\, y^{m-1} \,.\, z^{n-1}$$

$$= \frac{\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(n)}{p^l q^m r^n}\, \Phi(-\nabla) \frac{1}{(\log a)^l \,.\, (\log b)^m \,.\, \log c)^n} \,.$$

Umgekehrt, die Werthsbestimmung des Integrales:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty dz \,.\, \Phi(px+qy+rz)\, a^{-px} \,.\, b^{-qy} \,.\, c^{-rz} x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1}$$

ist zurückgeführt auf die Bestimmung des Werthes von:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty dz \,.\, a^{-px}\, b^{-qy}\, c^{-rz}\, x^{l-1}\, y^{m-1}\, z^{n-1},$$

welcher bekanntlich ist:

$$\frac{\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(n)}{p^l q^m r^n} \cdot \frac{1}{(\log a)^l . (\log b)^m . (\log c)^n},$$

und die Operation mit $\Phi(-\nabla)$ an demselben.

18. Allgemeiner, wegen:

$$F(xD_x, yD_y, zD_z, \&c.) \,.\, x^m y^n z^p \ldots = F(m,n,p,\&c.) \,.\, x^m y^n z^p \ldots,$$

ist:

$$F(aD_a, bD_b, cD_c,) \text{ \&c.} \, . \, a^{\varphi(x,y,z,\&c.)} \, . \, b^{\chi(x,y,z,\&c.)} \, . \, c^{\psi(x,y,z,\&c.)} \ldots$$

$$=$$

$$F(\varphi, \chi, \psi, \text{\&c.}) \, . \, a^{\varphi(x,y,z,\&c.)} \, . \, b^{\chi(x,y,z,\&c.)} \, . \, c^{\psi(x,y,z,\&c.)},$$

und wenn folglich:

$$\int dx \int dy \int dz \ldots \Omega(x,y,z,\text{\&c.}) a^{\varphi(x,y,z,\&c.)} \, . \, b^{\chi(x,y,z,\&c.)} \, . \, c^{\psi(x,y,z,\&c.)} \ldots = K,$$

ist; so ist:

$$\int dx \int dy \, . \, \Omega(x, y, \text{\&c.}) \, F(\varphi, \chi, \text{\&c.}) a^\varphi b^\chi \ldots = F(aD_a, bD_b, \text{\&c.}) \, . \, K,$$

wo $a, b, c, \ldots$ von den Integrationsgrenzen unabhängig sind. —

Umgekehrt, wenn der Werth des vielfachen bestimmten Integrales:

$$\int dx \int dy \int dz \ldots \Omega(x, y, z, \text{\&c.}) \, . \, F(\varphi, \chi, \psi, \text{\&c.}) a^\varphi b^\chi c^\psi \ldots$$

gesucht wird, indem $a, b, c, \ldots$ von den Integrationsgrenzen unabhängig sind; so reducirt sich die Untersuchung auf die Bestimmung des Werthes des einfachern Integrales:

$$\int dx \int dy \int dz \ldots \Omega(x, y, z, \text{\&c.}) \, . \, a^\varphi \, . \, b^\chi \, . \, c^\psi, \ldots$$

und die darauf folgende Operation mit der symbolischen Form:

$$F(aD_a, bD_b, cD_c, \text{\&c.}$$

an demselben.

Sechstes Kapitel.

Interpretation oder Werthesbstimmung von Operationssymbolen.

1. Wenn:

$$U = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n$$

ist, wo $A_0, A_1, A_2, \ldots$ Constanten bedeuten; so ist nach Kap. 2, Nr. 1 offenbar:

$$a^{xD_x} . U = A_0 + aA_1 x + a^2 A_2 x^2 + a^3 A_3 x^3 + \ldots + a^n A_n x^n.$$

Die Interpretation dieses Resultates besteht also in der einfachen Bemerkung: daß durch die Operation mit a^{xD_x} an U nichts weiter bewirkt wird, als daß in U überall ax an die Stelle von x tritt.

2. Aus der entsprechenden Nr. 2 des Kap. 3 wissen wir ferner, daß, wenn U irgend eine Anzahl independenter Veränderlicher enthält, und in eine Summe mehrerer homogener Functionen zerlegt wird, also:

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

ist, immer:

$$a^{xD_x + yD_y + zD_z + \ldots} . U,$$

oder:

$$a^{\nabla} . U = u_0 + au_1 + a^2 u_2 + \ldots + a^n u_n$$

ist. — Die Operation mit a^{∇} an U besteht also darin: daß überall $ax, ay, az, \ldots$ resp. für $x, y, z, \ldots$ in U an die Stelle tritt.

3. Wir wollen nun den Werth oder den wirklichen Ausdruck des Symboles:

$$e^{\varphi(x)D_x+\psi(y)D_y+\chi(z)D_z+\&c.}\,.\,U$$

suchen, wo:

$$U=f(x,y,z,\&c.)$$

ist.

Setzt man:

$$\frac{dx}{\varphi(x)}=d\xi,\quad \frac{dy}{\psi(y)}=d\eta,\quad \frac{dz}{\chi(z)}=d\zeta,\ \&c.$$

so wird dieses Symbol:

$$e^{D_\xi+D_\eta+D_\zeta+\&c.}\,.\,U.$$

Wegen:

$$U=f(x,y,z,\&c.)$$

und:

$$\left.\begin{aligned}\xi+c&=\int\frac{dx}{\varphi(x)}=\Phi(x)\\ \eta+d&=\int\frac{dy}{\psi(y)}=\Psi(y)\\ \zeta+e&=\int\frac{dz}{\chi(z)}=X(z)\\ &\&c.\end{aligned}\right\}$$

erhält man:

$$U=f\{\Phi^{-1}(\xi+c),\quad \Psi^{-1}(\eta+d),\quad X^{-1}(\zeta+e),\ \&c.\},$$

und mithin:

$$e^{D_\xi+D_\eta+\&c.}\,.\,U=f\{\Phi^{-1}(\xi+c+1),\ \Psi^{-1}(\eta+d+1),\ \&c.\},$$

woraus endlich folgt:

$$e^{\varphi(x)D_x+\varphi(y)D_y+\&c.}\,.\,f(x,y,\&c.)=f\{\Phi^{-1}(\Phi x+1),\ \Psi^{-1}(\Psi y+1)\,\&c.\}.$$

Die Operation mit dem Symbole:

$$e^{\varphi(x)D_x+\psi(y)D_y+\&c.}$$

an $U=f(x,y,z,\ldots)$ besteht also darin: daß x in $\Phi^{-1}(\Phi x+1)$, y in $\Psi^{-1}(\Psi y+1)$, &c. übergeht. —

Bei den wirklichen Anwendungen dieses Theoremes besteht die Hauptschwierigkeit in der Bestimmung der Integrale:

$$\int \frac{dx}{\varphi(x)}, \quad \int \frac{dy}{\varphi(y)}, \text{ \&c.},$$

und in der Umkehrung der Functionen $\Phi, \Psi, \ldots$

Beispiele.

1) Die einfachste und einleuchtendste Anwendung des vorhergehenden schönen Theoremes erhält man, wenn man setzt:

$$\varphi(x) = x, \quad \psi(y) = y, \quad \chi(z) = z, \text{ \&c.}$$

Denn in diesem Falle wird das Operationssymbol:

$$\varphi(x) D_x + \psi(y) D_y + \chi(z) D_z + \text{\&c.}$$

offenbar:

$$xD_x + yD_y + zD_z + \text{\&c.} = \nabla,$$

und folglich ist:

$$e^{\nabla} . f(x, y, \text{\&c.}) = f\left\{\log^{-1}(1 + \log x), \log^{-1}(1 + \log y), \text{\&c.}\right\},$$

oder:

$$e^{\nabla} . f(x, y, z, \text{\&c.}) = f(ex, ey, ez, \text{\&c.}).$$

Wenn $f(x, y, z, \ldots)$ in eine Summe homogener Functionen zerlegt wird, so stimmt dieses Resultat offenbar mit dem in Kap. 3, Nr. 2, d. h. mit:

$$e^{\nabla} U = u_0 + eu_1 + e^2 u_2 + \text{\&c.} + e^n u_n$$

überein. —

2) Es sei allgemeiner:

$$\varphi(x) = x^m, \quad \psi(y) + y^n, \text{ \&c.}$$

so ergibt sich, daß der Werth von:

$$e^{x^m D_x + y^n D_y + \text{\&c.}} f(x, y, \text{\&c.})$$

ist:

$$f\left\{\frac{x}{\{1-(m-1)x^{m-1}\}^{\frac{1}{m-1}}}, \frac{y}{\{1-(n-1)y^{n-1}\}^{\frac{1}{n-1}}}, \text{\&c.}\right\}.$$

Es hat keine Schwierigkeit, die Richtigkeit dieser Formel in den besondern Fällen:

$$m = n = \&c. = 0,$$
$$m = n = \&c. = 1$$

zu verificiren. — Für:

$$m = n = \&c. = 2$$

ergibt sich das Resultat:

$$e^{x^2 D_x + y^2 D_y + \&c.} f(x, y, \&c.) = f\left(\frac{x}{1-x}, \frac{y}{1-y}, \&c.\right),$$

und wenn:

$$m = n = \&c. = 3$$

ist, so erhält man:

$$e^{x^3 D_x + y^3 D_y + \&c.} . f(x, y, \&c.) = f\left\{\frac{x}{(1-2x^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{y}{(1-2y^2)^{\frac{1}{2}}}, \&c.\right\}.$$

3) Es sei:

$$\varphi(x) = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \psi(y) = (b^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}, \&c$$

so erhält man für das Symbol:

$$e^{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} D_x + (b^2-y^2)^{\frac{1}{2}} D_y + \&c.} f(x, y, \&c.)$$

den Werth:

$$f\left\{a \sin\left(1 + \arcsin\frac{x}{a}\right), b \sin\left(1 + \arcsin\frac{y}{b}\right), \&c.\right\}.$$

4) Es sei:

$$\varphi(x) = a^2 + x^2, \quad \psi(y) = b^2 + y^2, \&c.,$$

so entspricht dem symbolischen Ausdruck:

$$e^{(a^2+x^2)D_x + (b^2+y^2)D_y + \&c.} . f(x, y, \&c.)$$

der Werth:

$$f\left\{a \operatorname{tang} a\left(1 + \frac{1}{a}\operatorname{arctang}\frac{x}{a}\right), b \operatorname{tang} b\left(1 + \frac{1}{b}\operatorname{arctang}\frac{y}{b}\right) \&c.\right\}.$$

5) Es sei:

$$\varphi(x) = x \log x,\ \psi(y) = y \log y,\ \&c.,$$

so entspricht dem Symbole:

$$e^{x \log x D_x + y \log y D_y + \&c.} \cdot f(x, y, \&c.$$

der Werth:

$$f(x^e, y^e, \&c.).$$

Durch die Operation mit dem Symbole:

$$e^{x \log x D_x + y \log y D_y + \&c.}$$

an irgend einer Function $f(x, y, z, \ldots)$ wird also x in x^e, y in $y^e, \ldots$ umgesetzt. —

Für den Fall einer Veränderlichen ergibt sich dieses Theorem mit der größten Leichtigkeit direct, wenn man $x = e^\theta$ setzt, weil alsdann:

$$e^{x \log x . D_x} \cdot x^m = e^{\theta D_\theta}\left(1 + m\theta + \frac{m^2\theta^2}{1 \cdot 2} + \&c.\right),$$

ist, woraus nach Kap. 2, Nr. 2, folgt:

$$e^{x \log x D_x} \cdot x^m = 1 + e \cdot m\theta + e^2 \cdot \frac{m^2\theta^2}{1 \cdot 2} + \&c. = e^{em\theta} = (x^e)^m.$$

6) Nimmt man für $f(x, y, z, \ldots)$ die lineare Form $ax + by + \ldots$, so ist:

$$e^{\varphi(x)D_x + \psi(y)D_y + \&c.}(ax + by + \&c.) = a\Phi^{-1}(\Phi x + 1) + b\Psi^{-1}(\Psi y + 1) + \&c.$$

wo für $\varphi(x), \psi(y), \ldots$ die in den früheren Beispielen angewandten Werthe genommen werden können. —

4. Es gibt gewisse Fälle, in welchen die Werthsbestimmung des Symboles:

$$e^{\varphi(x)D_x + \psi(y)D_y + \&c.}\ U$$

sehr erleichtert werden kann. — Wenn z. B. U ein Product mehrerer Functionen $u, v, w, \ldots$ ist, so kann man das Theorem in der folgenden Nr., daß:

$$e^{\Psi} . uvw \ldots = e^{\Psi} u . e^{\Psi} v . e^{\Psi} w \ldots$$

ist, benutzen, wenn Ψ ein Symbol von solcher Beschaffenheit ist, daß:

$$\Psi . uv = u\Psi v + v\Psi u$$

ist, weil:

$$\varphi(x) D_x + \psi(y) D_y + \&c.$$

offenbar der erforderlichen Bedingung genügt. —

5. Wenn nämlich Ψ ein distributives Symbol ist, also:

$$\Psi . uv = u\Psi v + v\Psi u;$$

so läßt sich leicht zeigen, daß:

$$e^{\Psi} . uv = e^{\Psi} u . e^{\Psi} v$$

ist. — Denn es ist:

$$e^{\Psi} . uv = (1 + \frac{\Psi}{1} + \frac{\Psi^2}{1.2} + \ldots) . uv;$$

oder vermöge der gegebenen Bedingung:

$$e^{\Psi} . uv = uv + \frac{u\Psi v + v\Psi u}{1} + \frac{u\Psi^2 v + 2\Psi u . \Psi v + v\Psi^2 u}{1.2} + \&c.,$$

welches Resultat mit der Entwickelung von:

$$e^{\Psi} u . e^{\Psi} v$$

übereinstimmt. — Hieraus folgt, daß:

$$e^{\Psi} . uvw \ldots = e^{\Psi} u . e^{\Psi} v . e^{\Psi} w \ldots,$$

und mithin:

$$e^{\Psi} . u^n = (e^{\Psi} . u)^n$$

ist. —

Wenn also F irgend eine algebraische Function bedeutet, so ist:

$$e^{\Psi} . F(u) = F(e^{\Psi} u);$$

d. h. die Bestimmung des Resultates der Operation mit e^{Ψ} an irgend einer algebraischen Function von u reducirt sich auf die Be=

stimmung des Resultates der Operation mit demselben Symbole e^{Ψ} an u.

3. B. das distributive Symbol:

$$xD_x + yD_y + zD_z + \&c. = \nabla$$

genügt dem obigen Gesetze, und es ist daher:

$$e^{\Theta\nabla}.F(U) = F(e^{\Theta\nabla}.U),$$

wo Θ und U beliebige Functionen von $x, y, z, ..$ sind. —

Beispiel.

Es soll der algebraische Werth des symbolischen Ausdruckes:

$$e^{\Theta_m\nabla}.F(\Theta_n)$$

gefunden werden, wo Θ_m, Θ_n bekannte homogene Functionen von $x, y, z, ...$ resp. vom m^{ten} und n^{ten} Grade sind. —

Nach Kap. 3, Nr. 5 ist:

$$e^{\Theta_m\nabla}.\Theta_n = \left\{1 + n\Theta_m + \frac{n(n+m)}{1.2}\Theta_m^2 + \&c.\right\}\Theta_n,$$

oder:

$$e^{\Theta_m\nabla}.\Theta_n = \frac{\Theta_n}{(1-m\Theta_m)^{\frac{n}{m}}},$$

und daher:

$$e^{\Theta_m\nabla}.F(\Theta_n) = F\left\{\frac{\Theta_n}{(1-m\Theta_m)^{\frac{n}{m}}}\right\}.$$

Hiernach ist z. B.:

$$e^{(ax+by+cz)\nabla}.F(x^2+y^2+z^2) = F\left\{\frac{x^2+y^2+z^2}{\{1-(ax+by+cz)\}^2}\right\}.$$

Wenn es sich aber darum handelt, den algebraischen Werth des symbolischen Ausdruckes:

$$e^{\varphi(x,y,z,\&c.)D_x + \chi(x,y,z,\&c.)D_y + \psi(x,y,z,\&c.)D_z + \&c.}.U,$$

wo φ, χ, ψ gemischte Functionen aller Veränderlichen sind, und

$$U = F(x, y, z, \&c.),$$

ist, zu finden; so muß ein ganz anderes Verfahren angewandt werden — und man sieht sogar ein, daß die Aufgabe im Allgemeinen unlösbar ist. —

Wenn man jedoch voraussetzt, daß das Resultat durch:

$$F\{\Phi(x, y, z, \&c.),\ X(y, y, z, \&c.)\ \Psi(x, y, z, \&c.), \&c.\}$$

ausgedrückt werden kann, oder daß der Effect des Operationssymboles darin besteht: daß x in $\Phi(x, y, z, \ldots)$, y in $X(x, y, z, \ldots)$, &c. umgesetzt wird, während F der Form nach ungeändert bleibt; so lassen sich die Formen dieser unbekannten Functionen auf folgende Weise bestimmen. —

Es sei:

$$\varphi(x, y, z, \&c.) D_x + \chi(x, y, z, \&c.) D_y + \psi(x, y, z, \&c.) D_z + \&c. = \omega,$$

so ist:

$$\omega . x = \varphi(x, y, z, \&c.)$$

und:

$$\omega . e^{\omega} . x = e^{\omega} . \omega . x = e^{\omega} . \varphi(x, y, z, \&c.);$$

aber nach der Voraussetzung ist:

$$e^{\omega} . x = \Phi(x, y, z, \&c.)$$

und:

$$e^{\omega} . \varphi(x, y, z, \&c.) = \varphi\{\Phi(x, y, z, \&c.), X(x, y, z, \&c.), \Psi(x. y, z, \&c.), \&c.\}$$

Hieraus folgt:

$$(\varphi D_x + \chi D_y + \psi D_z + \&c.) . \Phi = \varphi(\Phi, X, \Psi, \&c.)$$

und ebenso: $(\varphi D_x + \chi D_y + \psi D_z + \&c.) . X = \chi(\Phi, X, \Psi, \&c.)$

$$(\varphi D_x + \chi D_y + \psi D_z + \&c.) . \Psi = \psi(\Phi, X, \Psi, \&c.)$$

Man hat also zur Bestimmung der Formen von $\Phi, X, \Psi, \ldots$ ebensoviele simultane partielle Differentialgleichungen, als Functionsformen zu finden sind. —

Wenn umgekehrt die Formen von Φ, X, Ψ, ... gegeben

und die von φ, χ, ψ, ... zu finden wären, so müßte man das letzte System als ein System gleichzeitiger Functionsgleichungen betrachten, woraus die Formen von φ, χ, ψ, ... abzuleiten wären.

7. Es sei das Resultat der Operation mit dem Symbole $\sin\left(\frac{\pi}{2}xD\right)$ an der ganzen rationalen Function:

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \&c. = X$$

zu bestimmen, so hat man:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}xD\right)X = \sin\left(\frac{\pi}{2}.0\right)A_0 + \sin\left(\frac{\pi}{2}.1\right)A_1x + \sin\left(\frac{\pi}{2}.2\right)A_2x^2 + \&c.,$$

oder:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\,x\,D\right)X = A_1x - A_3x^3 + A_5x^5 - A_7x^7 + \&c.$$

Das Resultat oder der Effect dieser Operation besteht also darin: daß in der ganzen rationalen Function die Glieder mit geradem Index wegfallen und daß die Glieder mit ungeradem Index abwechselnd ihr Zeichen ändern. —

Ebenso ergibt sich:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\,x\,D\right)X = A_0 - A_2x^2 + A_4x^4 - A_6x^6 + \&c.,$$

und man sieht leicht ein, worin das Resultat oder der Effect der Operation mit dem Symbole $\cos\left(\frac{\pi}{2}\,x\,D\right)$ an einer ganzen rationalen Function von x besteht. —

8. In ganz ähnlicher Weise läßt sich zeigen: daß, wenn die ganze rationale Function U von $x, y, z, \ldots$ in eine Summe homogener Functionen zerlegt werden kann, so daß man hat:

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \&c.,$$

der Effect der Operation mit $\sin\left(\frac{\pi}{2}\nabla\right)$ an U darin besteht: daß die homogenen Functionen von gerader Ordnung aus U wegfallen und die von ungerader Ordnung abwechselnd das Zeichen ändern, so daß man hat:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\nabla\right).U = u_1 - u_3 + u_5 - u_7 + \&c.$$

Ebenso ist:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\nabla\right).U = u_0 - u_2 + u_4 - u_6 + \&c.$$

und durch die Verbindung dieser beiden Resultate ergibt sich:

$$\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}\nabla\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\nabla\right)\right\}.U = u_0 + u_1 - u_2 - u_3 + u_4 + u_5 - u_6 - u_7 + \&c.,$$

woraus genügend erhellet, worin der Effect der Operation mit:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\nabla\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\nabla\right)$$

an U besteht. —

9. Aus dem Vorhergehenden erhellet, daß die Auflösung der linearen totalen Differentialgleichung:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}xD\right).y = 0$$

folgende ist:

$$y = C_0 + C_2x^2 + C_4x^4 + \&c.,$$

sowie, daß die Auflösung von:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}xD\right).y = 0$$

ist:

$$y = C_1x + C_3x^3 + C_5x^5 + \&c.,$$

wo C_0, C_1, C_2, ... willkürliche Constanten sind.

10. Auf gleiche Weise ist einleuchtend, daß die Auflösung der partiellen Differentialgleichung:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\nabla\right).z = 0$$

ist:

$$z = u_0 + u_2 + u_4 + \&c.$$

und die der Gleichung:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\nabla\right).z=0$$

folgende:

$$z=u_1+u_3+u_5+\&c.,$$

wo u_0, u_1, u_2,... arbiträre homogene Functionen resp. von den Ordnungen 0, 1, 2,... sind. —

Siebentes Kapitel.

Anwendungen des Operationscalculs auf Geometrie.

1. Wenn eine ebene Curve, deren Gleichung:

$$F(x, y) = 0,$$

ist, in ihrer Ebene blos verrückt wird, so bekommt ihre Gleichung im Allgemeinen die Form:

$$F(x + a, y + b) = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$e^{aD_x + bD_y} . F(x, y) = 0;$$

d. h. die Operation mit dem Symbole:

$$e^{aD_x + bD_y}$$

an der Gleichung der Curve ist gleichbedeutend mit der bloßen Verrückung der Curve in ihrer Ebene in eine durch die Werthe von a und b bestimmte Lage — oder gleichbedeutend mit der Verrückung der Coordinatenaxen in entgegengesetztem Sinne, so daß a, b die Coordinaten des neuen Anfangspunktes der Coordinaten sind. —

2. Durch eine einfache Betrachtung der Form dieses Theoremes ergibt sich ein eben so unerwartetes, als interessantes Resultat. — Wenn man nämlich den symbolischen Ausdruck:

$$e^{aD_x + bD_y} . F(x, y) = 0$$

entwickelt, so erhält man als Gleichung der verrückten Curve, welche kurzweg die Verrückung heißen soll:

$$\left\{1+\frac{(aD_x+bD_y)}{1}+\frac{(aD_x+bD_y)^2}{1.2}+\&c.\right\}.F(x,y)=0;$$

und mithin liegen die Durchschnittspunkte dieser Curve mit der ursprünglichen auf der durch die Gleichung:

$$\left\{\frac{(aD_x+bD_y)}{1}+\frac{(aD_x+bD_y)^2}{1.2}+\&c.\right\}.F(x,y)=0.$$

ausgedrückten Curve. — Wenn die ursprüngliche Curve, wie gewöhnlich, durch eine algebraische Gleichung $F(x,y)=0$ zwischen x und y gegeben ist; so besteht die letzte Gleichung aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, und ist von einem niedrigern Grade als $F(x,y)=0$. —

Beispiele.

1. Es soll die Curve gefunden werden, auf welcher die Durchschnittspunkte einer Curve des zweiten Grades mit ihrer Verrückung liegen. —

Wenn die Gleichung der gegebenen Curve die Form hat:

$$u_2+u_1+u_0=0,$$

so liegen ihre Durchschnittspunkte mit ihrer Verrückung, welche durch die Coordinaten a, b bestimmt wird, in der Curve, die durch die Gleichung:

$$\frac{aD_x+bD_y)}{1}.(u_2+u_1)+\frac{(aD_x+bD_y)^2}{1.2}.u_2=0,$$

ausgedrückt wird, und mithin eine gerade Linie ist. —

2. Man soll die Curve finden, auf welcher die Durchschnittspunkte einer Curve des dritten Grades mit ihrer Verrückung liegen. —

Wenn die Gleichung der gegebenen Curve die Form:

$$u_3+u_2+u_1+u_0=0,$$

hat, so liegen die Durchschnittspunkte dieser Curve mit ihrer Ver-

rückung, welche durch die Coordinaten a, b bestimmt wird, auf der durch die Gleichung:

$$\frac{(aD_x + bD_y)}{1}(u_3 + u_2 + u_1 +) \frac{(aD_x + bD_y)^2}{1.2}(u_3 + u_2) + \frac{(aD_x + bD_y)^3}{1.2.3} u_3 = 0,$$

ausgedrückten Curve, welche offenbar vom zweiten Grade ist. —

3. In ganz ähnlicher Weise erhellet, daß die Operation mit dem Symbole:

$$e^{aD_x + bD_y + cD_z}$$

an der Gleichung einer Fläche:

$$F(x, y, z) = 0$$

gleichgeltend ist einer bloßen Verrückung dieser Fläche in eine durch die Werthe der Größen a, b, c bestimmte Lage.

4. Die Durchschnittscurve irgend einer Fläche mit ihrer durch die Größen a, b, c bestimmten Verrückung liegt auf der durch die Gleichung:

$$\left\{\frac{(aD_x + bD_y + cD_z)}{1} + \frac{(aD_x + bD_y + cD_z)^2}{1.2} + \&c.\right\} . F(x, y, z) = 0,$$

ausgedrückten Fläche, welche im Allgemeinen von einer niedrigen Ordnung ist, als die gegebene Fläche. —

So z. B. liegt die Durchschnittscurve einer Fläche des zweiten Grades mit ihrer Verrückung auf der durch die Gleichung:

$$\frac{(aD_x + bD_y + cD_z)}{1}(u_2 + u_1) + \frac{(aD_x + bD_y + cD_z)^2}{1.2} u_2 = 0;$$

ausgedrückten Ebene — und die Durchschnittscurve einer Fläche des dritten Grades mit ihrer Verrückung auf der durch die Gleichung:

$$\frac{(aD_x + bD_y + cD_z)}{1}(u_3 + u_2 + u_1) + \frac{(aD_x + bD_y + cD_z)^2}{1.2}(u_3 + u_2) + \frac{(aD_x + bD_y + cD_z)^3}{1.2.3} u_3 = 0.$$

ausgedrückten Fläche des zweiten Grades. —

5. Wenn die Gleichung einer ebenen Curve in Polarcoordinaten ist:

$$f\,r, \theta) = 0,$$

so ist die Gleichung derselben Curve nach einer Drehung um den Anfangspunkt durch irgend einen Winkel ω, weil der Radiusvector r ungeändert bleibt:

$$f(r, \theta + \omega) = 0,$$

oder:

$$e^{\omega D_\theta} \,.\, f(r, \theta) = 0.$$

Wenn aber die Curve in rechtwinkligen Coordinaten ausgedrückt wird, so hat man:

$$f(r, \theta) = F(x, y),$$

und:

$$D_\theta = D_\theta x \,.\, D_x + D_\theta y \,.\, D_y = x D_y - y D_x\,;$$

mithin ist die Gleichung der Curve nach der Drehung:

$$e^{\omega(xD_y - yD_x)} \,.\, F(x, y) = 0,$$

d. h. die Operation mit dem Symbole:

$$e^{\omega(xD_y - yD_x)}$$

an der Gleichung einer ebenen Curve:

$$F(x, y) = 0$$

ist gleichbedeutend mit einer Drehung der Curve in ihrer Ebene um den Anfangspunkt durch einen Winkel ω. — Nun weiß man aber aus andern Quellen, daß die Gleichung der Curve in ihrer neuen Lage folgende ist:

$$F(x \cos \omega - y \sin \omega,\; x \sin \omega + y \cos \omega) = 0,$$

und der Werth des symbolischen Ausdruckes:

$$e^{\omega(xD_y - yD_x)} \,.\, F(x, y)$$

ist mithin:

$$F(x \cos \omega - y \sin \omega, \ x \sin \omega + y \cos \omega).$$

6. Aus Betrachtungen a priori hat sich im ersten Kapitel ergeben, daß:

$$e^{\omega(xD_y - yD_x) + aD_x + bD_y} \, . \, F(x, y)$$

weder mit:

$$e^{\omega(xD_y - yD_x)} \, . \, e^{aD_x + bD_y} \, . \, F(x, y),$$

noch mit:

$$e^{aD_x + bD_y} \, . \, e^{\omega(xD_y - yD_x)} \, . \, F(x, y),$$

äquivalent ist, weil die Symbole:

$$\omega(xD_y - yD_x), \ aD_x + bD_y,$$

in der Thai nicht commutativ sind, und hieraus folgt a posteriori, daß die Gleichungen:

$$e^{\omega(xD_y - yD_x)} \, . \, e^{aD_x + bD_y} \, . \, F(x, y) = 0,$$

und:

$$e^{aD_x + bD_y} \, . \, e^{\omega(xD_y - yD_x)} \, . \, F(x, y) = 0,$$

verschieden liegende Curven ausdrücken, indem der Drehungsmittelpunkt in dem einen Falle der Curve näher, als in dem andern; aber der Drehungswinkel in beiden Fällen derselbe ist. — Dieses erhellet auch aus anderweiten analytischen Betrachtungen, wonach die erste Gleichung mit:

$$F(x \cos \omega - y \sin \omega + a, \ x \sin \omega + y \cos \omega + b) = 0,$$

und die zweite mit:

$$F\{(x + a) \cos \omega - (y + b) \sin \omega, \ (x + a) \sin \omega + (y + b) \cos \omega\} = 0.$$

gleichbedeutend ist. —

7. Wenn der Winkel ω sehr klein ist, so kann man in dem Ausdrucke:

$$e^{\omega(xD_y - yD_x)} \, . \, F(x, y) = 0;$$

die Glieder zweiter Ordnung hinweglassen, wodurch sich ergibt:

$$F(x,y) + \omega\,(xD_y - yD_x)\,.\,F(x,y) = 0.$$

Wenn also:

$$F(x,y) = 0$$

die Gleichung einer ebenen Curve ist, und diese Curve erhält eine sehr kleine Drehung in ihrer Ebene um den Anfangspunkt der Coordinaten; so liegen die Durchschnittspunkte der ursprünglichen und der neuen Curve auf der durch die Gleichung:

$$(xD_y - yD_x)\,.\,F(x,y) = 0,$$

ausgedrückten Curve, welche also durch den Anfangspunkt geht, und von demselben Grade ist, wie jene. —

Beispiel.

Die gegebene Curve sei ein Kegelschnitt, also ihre Gleichung:

$$F(x,y) = Ax^2 + A'y^2 + 2Bxy + 2\,(Cx + C'y) + D = 0.,$$

so wird die Gleichung:

$$(xD_y - yD_x)\,.\,F(x,y) = 0,$$

in diesem Falle:

$$x(A'y + Bx + C') - y\,(Ax + By + C) = 0,$$

oder:

$$B(x^2 - y^2) + (A' - A)\,xy + C'x - Cy = 0;$$

und mithin liegen die Durchschnittspunkte beider Curvenlagen auf einer durch den Anfangspunkt geheuden gleichseitigen Hyperbel. — Wenn der Kegelschnitt eiu Kreis ist, so liegen diese Durchschnittspunkte auf einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden, wie sich auch leicht direct ergibt. —

8. Es ist möglich, daß F eine solche Form hat, daß die Gleichung:

$$(xD_y - yD_x)\,.\,F(x,y) = 0$$

eine identische wird — und in diesem Falle wird die Lage der gegebenen Curve durch Drehung nicht verändert. — Diese Form von F ergibt sich durch Auflösung der Gleichung:

$$(xD_y - yD_x) \,.\, u = 0$$

nämlich:

$$u = \varphi_0 (e^{-x^2}, e^{y^2}) = \Psi (x^2 + y^2);$$

und da die Auflösung von:

$$\Psi (x^2 + y^2) = 0$$

ist:

$$x^2 + y^2 = C,$$

so folgt, daß der Kreis die einzige ebene Curve ist, welche durch Drehung in ihrer Ebene — und zwar um den Mittelpunkt als Anfangspunkt der Coordinaten — ihre Lage nicht ändert. —

9. Wir wollen nun das Operationssymbol suchen, welches so beschaffen ist: daß durch Anwendung desselben auf die Function $F(x, y)$, diese in $F(y, x)$ umgesetzt wird, so daß x, y unter sich vertauscht werden. —

Dieser Zweck wird offenbar erreicht, wenn man aus der Gleichung $F(x, y) = 0$ zwischen Parallelcoordinaten die Gleichung $f(r, \theta) = 0$ zwischen Polarcoordinaten ableitet, und ein Operationssymbol sucht, welches θ in $\frac{\pi}{2} - \theta$ verwandelt und r ungeändert läßt, wenn damit an $f(r, \theta)$ operirt wird. — Nun wissen wir aber (Kap. 2, Nr. 2), daß:

$$e^{-\frac{1}{2}\pi D}{}_\theta \,.\, f(r, \theta) = f(r, \theta - \tfrac{1}{2}\pi),$$

ist, und daß das Zeichen von $\theta - \frac{\pi}{2}$ überall in das entgegengesetzte verwandelt wird, wenn man mit:

$$(-1)^{(\theta - \frac{1}{2}\pi) D_{(\theta - \frac{1}{2}\pi)}} = (-1)^{(\theta - \frac{1}{2}\pi) D_\theta};$$

operirt, oder daß

$$(-1)^{(\theta-\frac{1}{2}\pi)D_\theta} \cdot f(r, \theta - \tfrac{1}{2}\pi) = f(r, \tfrac{1}{2}\pi - \theta)$$

ist. — Hieraus folgt, wenn man das Operationssymbol in Exponentialform ausdrückt, und wieder zu rechtwinkligen Coordinaten zurückgeht, daß:

$$e^{\pm\pi\sqrt{-1}\left(\text{arctang}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\pi\right)(xD_y - yD_x)} \cdot F(x, y) = F(y, x)$$

ist. —

10. Wenn die Gleichung einer Fläche in Polarcoordinaten ist:

$$f(r, \theta, \varphi) = 0,$$

so ist die Gleichung derselben Fläche nach einer Drehung durch einen Winkel ψ um die Axe, von welcher aus der Winkel θ gezählt wird:

$$f(r, \theta, \varphi + \psi) = 0,$$

oder:

$$e^{\psi D_\varphi} \cdot f(r, \theta, \varphi) = 0.$$

Aber wenn m irgend ein Punkt der Fläche in ihrer ursprünglichen Lage, O der Anfangspunkt, OA die Drehungsaxe, und ds ein in m auf der Ebene mOA normales Element ist; so ist wegen $ds = pd\varphi$, wo p das Perpendikel von m auf OA bedeutet:

$$D_\varphi = pD_s = p\,(D_s x \cdot D_x + D_s y \cdot D_y + D_s z \cdot D_z.)$$

Bezeichnen ferner m, l, n die Winkel, welche die Axe OA mit den Coordinatenaxen macht; so ist:

$$D_\varphi = (y\cos n - z\cos m)D_x + (z\cos l - x\cos n)D_y + (x\cos m - y\cos l)D_z$$

oder:

$$D_\varphi = \cos l\,(zD_y - yD_z) + \cos m\,(xD_z - zD_x) + \cos n\,(yD_x - xD_y).$$

Die Gleichung der Fläche nach der Drehung ist folglich:

$$e^{\psi[\cos l(zD_y - yD_z) + \cos m(xD_z - zD_x) + \cos n(yD_x - xD_y)]} \cdot F(x, y, z) = 0,$$

d. h. die Operation mit dem Symbole:

$$e^{\psi[\cos l(zD_y - yD_z) + \cos m(xD_z - zD_x) + \cos n(yD_x - xD_y)]}$$

an der Gleichung der Fläche:

$$F(x, y, z) = 0,$$

ist gleichbedeutend mit der Drehung dieser Fläche durch einen Winkel ψ und um eine Axe, welche mit den Coordinatenaxen die Winkel l, m, n bildet. —

11. Da aber der Ausdruck:

$$e^{\psi[\cos l(zD_y - yD_z) + \cos m(xD_z - zD_x) + \cos n(yD_x - xD_y)]} \,.\, F(x, y, z)$$

nicht gleichbedeutend ist mit:

$$e^{\psi \cos l(zD_y - yD_z)} \,.\, e^{\psi \cos m(xD_z - zD_x)} \,.\, e^{\psi \cos n(yD_x - xD_y)} \,.\, F(x, y, z),$$

so folgt: daß das Princip der Zusammensetzung der Drehung im Allgemeinen nicht stattfindet. — Wenn jedoch der Drehungswinkel ψ unendlich klein ist, so können die höhern Potenzen desselben in der Entwickelung des Operationssymboles hinweggelassen werden, wodurch die beiden letzten Ausdrücke äquivalent werden, und mithin das erwähnte Princip stattfindet, wie auch anderweit bekannt ist. —

12. Wenn der Winkel ψ sehr klein ist, so kann man in der Entwickelung von:

$$e^{\psi[\cos l(z\,D_y - yD_z) + \cos m\,(xD_z - zD_x) + \cos n(yD_x - xD_y)]} \,.\, F(x, y, z) = 0$$

wieder die Glieder der zweiten Ordnung hinweglassen, und wenn $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer Fläche ist, welche eine sehr kleine Drehung um eine Axe macht, die mit den Coordinatenaxen die Winkel l, m, n bildet; so drückt die Gleichung:

$$\{\cos l(zD_y - yD_z) + \cos m(xD_z - zD_x) + \cos n(yD_x - xD_y)\}\; F(x,y,z) = 0$$

eine dritte Fläche aus, welche durch die Durchschnittslinie der beiden ersten Flächen, und mithin durch den Anfangspunkt geht. —

Beispiel.

Wenn die gegebene Fläche vom zweiten Grade und ihre Gleichung von der Form:

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2(Byz+B'zx+B''xy)+2(Cx+C'y+C''z)+D=0$$

ist, so läßt sich leicht zeigen, daß die Durchschnittscurve dieser Fläche mit ihrer neuen Lage in Folge einer Drehung durch einen sehr kleinen Winkel um eine Axe, welche mit den Coordinatenaxen die Winkel l, m, n bildet, auf einer dritten Fläche des zweiten Grades liegt, deren Gleichung ist:

$$(B'\cos m - B''\cos n)x^2 + (B''\cos n - B\cos l)y^2 + (B\cos l - B'\cos m)z^2$$
$$+ \&c. = 0,$$

und welche durch den Anfangspunkt geht. — Zu bemerken ist noch: daß die Summe der Coefficienten von x^2, y^2 und z^2 gleich Null ist, analog wie bei dem entsprechenden Satze in der ebenen Geometrie. —

13. Sowohl geometrisch, als analytisch erhellet: daß, wenn eine Fläche nach einer Drehung durch einen sehr kleinen Winkel um eine beliebige Axe ihre Lage nicht ändert, dasselbe auch noch für jeden endlichen Drehungswinkel stattfindet; d. h. die Fläche ist eine s. g. Rotationsfläche. — Die allgemeine Differentialgleichung einer Rotationsfläche um eine Axe, welche durch den Anfangspunkt geht und mit den Coordinatenaxen die Winkel l, m, n bildet, ist also:

$$\{\cos l(zD_y - yD_z) + \cos m\,(xD_z - zD_x) + \cos n\,(yD_x - xD_y)\}\,.\,u = 0,$$

oder:

$$\{(y\cos n - z\cos m)D_x + (z\cos l - x\cos n)D_y + (x\cos m - y\cos l)D_z\}.u = 0$$

eine etwas mehr symmetrische Form, als die von Monge und Leroy angegebene — und deren geometrische Interpretation ist: daß das Perpendikel auf der durch den Radiusvector und die Dre-

hungsaxe gehenden Ebene auf der Normale der Fläche senkrecht steht. —

Zu bemerken ist noch: daß der obigen Differentialgleichung durch die endliche Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l}(y\cos n - z\cos m)^2 + (z\cos l - x\cos n)^2 + (x\cos m - y\cos l)^2 \\ \qquad - \Phi\,(x\cos l + y\cos m + z\cos n)\end{array}\right\} = 0$$

genügt wird, deren geometrische Interpretation auf der Hand liegt.

14. Das vorhergehende Theorem, sowie das entsprechende der ebenen Geometrie, ergeben sich noch einfacher aus der Betrachtung der Polargleichungen.

So wird z. B. die ebene Curve, welche mit ihrer Verrückung durch einen sehr kleinen Winkel um den Anfangspunkt zusammenfällt, durch die Gleichung:

$$D_\theta^1 . f(r, \theta) = 0$$

gegeben; d. h. die Polargleichung der Curve ist unabhängig von θ; also blos von der Form:

$$f(r) = 0,$$

welche gibt:

$$r = \text{const.},$$

d. h. die allgemeine Gleichung des Kreises. —

Ebenso wird die einzige Fläche, welche mit sich selbst zusammenfällt, wenn sie durch einen sehr kleinen Winkel um die Axe der Polarcoordinaten gedreht wird, im Allgemeinen durch die Gleichung:

$$D_\varphi . f(r, \theta, \varphi) = 0$$

gegeben; d. h. die Polargleichung dieser Fläche ist, unabhängig von φ, oder blos von der Form:

$$f(r, \theta) = 0.$$

Die allgemeine Gleichung der Rotationsflächen in Parallelcoordinaten ist folglich:

$$f\left\{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}},\ \text{arc cos.}\ \frac{x\cos l + y\cos m + z\cos n}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right\} = 0,$$

welche gibt:

$$x \cos l + y \cos m + z \cos n = \Phi(x^2 + y^2 + z^2).$$

15. Es läßt sich leicht direct zeigen, daß die Symbole:

$$xD_x + yD_y, \quad xD_y - yD_x,$$

und mithin alle Functionen derselben, commutativ sind, was sich geometrisch auch leicht daraus ergibt, daß:

$$xD_x + yD_y = rD_r, \qquad xD_x - yD_x = D_\theta$$

ist. —

Allgemeiner, es erhellet geometrisch, daß das Symbol:

$$xD_x + yD_y + zD_z$$

und:

$$\cos l\,(zD_y - yD_z) + \cos m\,(xD_z - zD_x) + \cos n\,(yD_x - xD_y),$$

folglich auch alle Functionen derselben, commutativ sind. — Hieraus folgt, daß die durch:

$$a^{xD_x + yD_y + zD_z} \,.\, e^{\psi[\cos l(zD_y - yD_z) + \&c.]} \,.\, F(x, y, z) = 0,$$

ausgedrückte Fläche mit der durch:

$$e^{\psi[\cos l(zD_y - yD_z) + \&c.]} \,.\, a^{xD_x + yD_y + zD_z} \,.\, F(x, y, z) = 0.$$

ausgedrückten identisch ist. — Wenn also irgend eine Fläche:

$$F(x, y, z) = 0$$

um eine durch den Anfangspunkt gehende Axe gedreht und eine zweite ähnliche und ähnlichliegende Fläche angenommen wird, indem der Anfangspunkt der gemeinschaftliche Aehnlichkeitsmittelpunkt und a das Verhältniß ihrer linearen Dimensionen ist; so ist die resultirende Fläche dieselbe, als die, welche bei der umgekehrten Aufeinanderfolge dieser Operationen erhalten würde. —

16. Wenn die Gleichung einer ebenen Curve folgende ist:

$$U = F(x, y) = 0,$$

so ist bekanntlich die Differentialgleichung der Tangente in irgend

einem Punkte (x, y) derselben:

$$\alpha D_x U + \beta D_y U = x D_x U + y D_y U,$$

wo α, β die laufenden oder veränderlichen Coordinaten dieser Tangente sind. —

Wenn aber U in eine Summe homogener Functionen zerlegt wird, so daß man hat:

$$U = u_n + u_{n-1} + \ldots + u_2 + u_1 + u_0;$$

so ist bekanntlich:

$$(x D_x + y D_y) \,.\, U = n u_n + (n-1)\, u_{n-1} + \ldots + 2u_2 + u_1,$$

und wegen:

$$u_n + u_{n-1} + \ldots + u_2 + u_1 + u_0 = 0$$

mithin:

$$(x D_x + y D_y) \,.\, U = -(u_{n-1} + 2u_{n-2} + \ldots + n u_0).$$

Die obige Form der Gleichung der Tangente an der Curve $U = 0$ läßt sich also im Allgemeinen auf folgende bringen:

$$\alpha D_x U + \beta D_y U + u_{n-1} + 2u_{n-2} + \ldots + n u_0 = 0,$$

wo α, β die laufenden Coordinaten dieser Tangente sind. —

17. Wenn P das aus dem Anfangspunkte auf die Tangente im Punkte (x, y) der Curve $U = 0$ gezogene Perpendikel bezeichnet, so ist bekanntlich:

$$P = \frac{x D_x U + y D_y U}{\{(D_x U)^2 + (D_y U)^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

und aus der vorhergehenden Nr. erhellet: daß dieser Ausdruck im Allgemeinen auf die Form:

$$P = -\frac{u_{n-1} + 2u_{n-2} + \ldots + n u_0}{\{(D_x U)^2 + (D_y U)^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

gebracht werden kann. —

Aus diesem Werthe ergibt sich folgendes Theorem:

Wenn eine ebene Curve des n^{ten} Grades gegeben ist, so werden die Punkte derselben, für welche die Perpen-

dikel aus dem Anfangspunkte auf die Tangenten in diesen Punkten einen constanten Werth k haben, mittelst des Durchschnittes mit einer Curve des $2(n-1)^{\text{ten}}$ Grades bestimmt, deren Gleichung ist:

$$k^2 \{(D_xU)^2 + (D_yU)^2\} = (u_{n-1} + 2u_{n-2} + \ldots + nu_0)^2.$$

18. Wenn α, β als feste Coordinaten eines nicht auf der gegebenen Curve liegenden Punktes betrachtet werden, so drückt die Gleichung:

$$\alpha D_xU + \beta D_yU + u_{n-1} + 2u_{n-2} + \ldots + nu_0 = 0$$

die Polarcurve des Punktes (α, β) in Beziehung auf die gegebene Curve $U = 0$ aus. Die Polarcurve des Anfangspunktes in Bezug auf die durch die Gleichung:

$$u_n + u_{n-1} + \ldots + u_2 + u_1 + u_0 = 0$$

ausgedrückte Curve wird demnach im Allgemeinen durch die Gleichung:

$$u_{n-1} + 2u_{n-2} + 3u_{n-3} + \ldots + nu_0 = 0.$$

ausgedrückt. —

Beispiele.

(1). Die gegebene Curve sei vom zweiten Grade, und ihre Gleichung:

$$U = u_2 + u_1 + u_0 = 0,$$

so ist die allgemeine Gleichung der Tangente in einem beliebigen Punkte:

$$\alpha D_xU + \beta D_yU + u_1 + 2u_0 = 0,$$

wo α, β die laufenden Coordinaten derselben sind; und der allgemeine Ausdruck des Perpendikels aus dem Anfangspunkte auf diese Tangente ist:

$$P = -\frac{u_1 + 2u_0}{\{(D_xU)^2 + (D_yU)^2\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Die Punkte der gegebenen Curve des zweiten Grades für welche die Perpendikel aus dem Anfangspunkte auf die Tangenten in diesen Punkten einen constanten Werth k haben, sind die Durchschnittspunkte dieser Curve mit einer andern Curve des zweiten Grades, deren Gleichung ist:

$$k^2\{(D_xU)^2+(D_yU^2\}=(u_1+2u_0)^2.$$

Die allgemeine Gleichung der Polarcurve des Punktes (α, β) in Beziehung auf die gegebene Curve ist:

$$\alpha D_xU+\beta D_yU+u_1+2u_0=0,$$

und drückt folglich eine gerade Linie aus. —

Endlich ist die allgemeine Gleichung der Polarcurve des Anfangspunktes in Beziehung auf die gegebene Curve:

$$u_1+2u_0=0.$$

(2). Die gegebene Curve sei von der dritten Ordnung und ihre Gleichung:

$$U=u_3+u_2+u_1+u_0=0,$$

Alsdann ist die allgemeine Gleichung der Tangente in einem beliebigen Punkte:

$$\alpha D_xU+\beta D_yU+u_2+2u_1+3u_0=0,$$

wo α, β die laufenden Coordinaten sind, und der allgemeine Ausdruck des Perpendikels aus dem Anfangspunkte auf die Tangente:

$$P=-\frac{u_2+2u_1+3u_0}{\{(D_xU)^2+(D_yU)^2\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Die Punkte der gegebenen Curve, für welche die Perpendikel aus dem Anfangspunkte auf die Tangenten in diesen Punkten einen constanten Werth k haben, sind die Durchschnittspunkte dieser Curve mit einer Curve der vierten Ordnung, deren Gleichung ist:

$$k^2\{(D_xU)^2+(D_yU)^2\}=(u_2+2u_1+3u_0)^2.$$

Ferner ist die Polarcurve eines beliebigen Punktes (α, β) in Bezug auf die gegebene Curve des dritten Grades eine Curve von der zweiten Ordnung, deren Gleichung ist:

$$\alpha D_x U + \beta D_y U + u_2 + 2u_1 + 3u_0 = 0.$$

Endlich ist die allgemeine Gleichung der Polarcurve des Anfangspunktes in Beziehung auf die gegebene Curve der dritten Ordnung:

$$u_2 + 2u_1 + 3u_0 = 0$$

und drückt folglich eine Curve zweiter Ordnung aus. —

19. Es hat keine Schwierigkeit, die Resultate der vorhergehenden Nrn. auf drei Dimensionen auszudehnen. So kann z. B. die allgemeine Differentialgleichung der Berührungsebene einer beliebigen Fläche:

$$U = F(x, y, z) = 0,$$

wo:

$$U = u_n + u_{n-1} + \ldots + u_2 + u_1 + u_0$$

ist, auf die Form:

$$\alpha D_x U + \beta D_y U + \gamma D_z U + u_{n-1} + u_{n-2} + \ldots + n u_0 = 0$$

gebracht werden, wo α, β, γ die laufenden Coordinaten der Tangentialebene sind. —

Ferner ist der allgemeine Ausdruck des Perpendikels aus dem Anfangspunkte auf die Tangentialebene in irgend einem Punkte der Fläche $U = 0$:

$$P = -\frac{u_{n-1} + 2u_{n-2} + \ldots + n u_0}{\{(D_x U)^2 + (D_y U)^2 + (D_z U)^2\}^{\frac{1}{2}}},$$

und man hat folglich den Lehrsatz:

Wenn eine Fläche der n^{ten} Ordnung gegeben ist, so werden die Punkte, für welche die Perpendikel aus dem Anfangspunkte auf die Tangentialebenen in diesen Punkten einen constanten Werth k haben, mittelst des Durch-

schnittes der gegebenen Fläche mit einer Fläche von der $2\,(n-1)^{ten}$ Ordnung bestimmt deren Gleichung ist:

$$k^2\{(D_xU)^2+(D_yU)^2+(D_zU)^2\}=(u_{n-1}+2u_{n-2}+\ldots+nu_0)^2.$$

Wenn ferner (α,β,γ) ein nicht auf der gegebenen Fläche liegender fester Punkt ist, so ist:

$$\alpha D_xU+\beta D_yU+\gamma D_zU+u_{n-1}+2u_{n-2}+\ldots+nu_0=0 \qquad (p)$$

die Gleichung der Polarfläche dieses Punktes in Bezug auf die gegebene Fläche. — Mithin ist die Gleichung der Polarfläche des Anfangspunktes in Beziehung auf die gegebene Fläche:

$$u_{n-1}+2u_{n-2}+3u_{n-3}+\ldots+nu_0=0.$$

Diese allgemeinen Resultate lassen sich leicht auf Flächen der zweiten und dritten Ordnung, so wie auf die durch die Gleichung $u_n=0$ ausgedrückte Fläche anwenden. —

20. Wenn sich der Punkt (α,β,γ) auf der Fläche des m^{ten} Grades:

$$V=v_m+v_{m-1}+\ldots+v_1+v_0=0$$

bewegen kann, und verschiedene aufeinanderfolgende Lagen auf derselben annimmt; so bilden die Durchschnitte der Polarflächen dieser Lagen in Bezug auf die Fläche $U=0$ eine dritte Fläche, welche in Beziehung auf $V=0$ die reciproke Polarfläche genannt wird, wenn die Fläche $U=0$ von der zweiten Ordnung ist. —

Um die Gleichung dieser dritten Fläche zu erhalten, muß man die Gleichung $V=0$, so wie die Gleichung (p) der Polarfläche in Bezug auf (α,β,γ) differentiiren, wodurch sich ergibt:

$$D_\alpha V\,.\,d\alpha+D_\beta V\,.\,d\beta+D_\gamma V\,.\,d\gamma=0,$$

$$D_xU\,.\,dx+D_yU\,.\,dy+d_zU\,.\,dz=0.$$

Wird alsdann die letzte Gleichung mit einer unbestimmten Größe λ multiplicirt, das Product zu der ersten addirt und werden die Coefficienten von $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ einzeln $=0$ gesetzt; so erhält man die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} D_\alpha V + \lambda D_x U = 0 \\ D_\beta V + \lambda D_y U = 0 \\ D_\gamma V + \lambda D_z U = 0. \end{array}\right\} \quad (q)$$

Zwischen diesen Gleichungen, der Gleichung (p) der Polarfläche und der Gleichung $V = 0$ müssen nun α, β, γ und λ noch eliminirt werden. — Multiplicirt man zu dem Zwecke die Gleichungen (q) resp. mit α, β, γ und bemerkt, daß:

$$\alpha D_\alpha V + \beta D_\beta V + \gamma D_\gamma V = -\{v_{m-1} + 2v_{m-2} + \ldots + mv_0\},$$
$$\alpha D_x U + \beta D_y U + \gamma D_z U = -\{u_{n-1} + 2u_{n-2} + \ldots + nu_0\},$$

ist, so findet man:

$$\lambda = -\frac{v_{m-1} + 2v_{m-2} + \ldots + mv_0}{u_{n-1} + 2u_{n-2} + \ldots + nu_0} = -\frac{(V)}{(U)}.$$

Es bleiben also bloß noch α, β, γ zwischen den 4 Gleichungen $V = 0$ und:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{(V)} \cdot D_\alpha V = \frac{1}{(U)} \cdot D_x U \\ \frac{1}{(V)} \cdot D_\beta V = \frac{1}{(U)} \cdot D_y U \\ \frac{1}{(V)} \cdot D_\gamma V = \frac{1}{(U)} \cdot D_z U \end{array}\right\}$$

zu eliminiren, wovon die linken Seiten blos α, β, γ und die rechten Seiten nur x, y, z enthalten. — Diese Elimination ist aber bei dem dermaligen Stande der Analysis nicht möglich — und mithin die allgemeine, in Rede stehende Aufgabe unlösbar. —

21. Auf die Mittheilung des vorhergehenden Resultates hat uns Spottiswoode die Bemerkung zukommen lassen: daß man den drei letzten Gleichungen eine andere Form geben kann, woraus sich interessante Folgerungen ziehen lassen, und wir verdanken R. Townsend eine werthvolle Modification dieser Andeutungen.

Wenn man nämlich bemerkt, daß der Punkt (α, β, γ) auf der Fläche $V = 0$ liegt, so ist klar, daß, wenn P das Perpendikel aus dem

Anfangspunkte auf die Berührungsebene in diesem Punkte und l, m, n die Winkel bezeichnen, welche dasselbe mit den Axen macht, die drei letzten Gleichungen auf folgende Form:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\cos l}{P} &= \frac{1}{(U)} \, . \, D_x U \\ -\frac{\cos m}{P} &= \frac{1}{(U)} \, . \, D_y U \\ -\frac{\cos n}{P} &= \frac{1}{(U)} \, . \, D_z U \end{aligned}\right\}$$

gebracht werden können. — Offenbar gestatten die rechten Seiten dieser Gleichungen keine ähnliche Modification, wie die auf der linken Seite vorgenommene, weil der Punkt (x, y, z) nicht nothwendig auf der Fläche $U = 0$ liegt. —

22. In einem Falle gestattet die allgemeine Aufgabe der Bestimmung der Umhüllungsfläche der successiven Polarflächen nicht blos eine Auflösung, sondern die resultirende Gleichung dieser Umhüllungsfläche scheint auch elegant und nützlich zu sein — nämlich, wenn $V = 0$ die symmetrische Form:

$$\frac{\alpha^m}{a^m} + \frac{\beta^m}{b^m} + \frac{\gamma^m}{c^m} = 1$$

annimmt, während $U = 0$ ganz allgemein bleibt. — Die drei letzten Gleichungen werden in diesem Falle:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^{m-1}}{a^m} + \frac{1}{(U)} \, . \, D_x U = 0, \\ \frac{\beta^{m-1}}{b^m} + \frac{1}{(U)} \, . \, D_y U = 0, \\ \frac{\gamma^{m-1}}{c^m} + \frac{1}{(U)} \, . \, D_z U = 0, \end{aligned}$$

und wenn α, β, γ zwischen diesen Gleichungen und $V = 0$ eliminirt werden; so ergibt sich die Gleichung der gesuchten Umhüllungsfläche in der symmetrischen Form:

$$(aD_xU)^{\frac{m}{m-1}} + (bD_yU)^{\frac{m}{m-1}} + (cD_zU)^{\frac{m}{m-1}} = [-(U)]^{\frac{m}{m-1}},$$

wo gesetzt ist:

$$(U) = u_{n-1} + 2u_{n-2} + 3u_{n-3} + \ldots + nu_0.$$

Die nähere Betrachtung einiger speciellen Fälle führt auf interessante Resultate.

(1) Wenn $m = 2$ ist, oder wenn der Pol auf einer Fläche des zweiten Grades mit Mittelpunkt bleiben muß, so ist der Grad der Umhüllungsfläche der successiven Polarflächen in Bezug auf eine Fläche des n^{ten} Grades im Allgemeinen $= 2(n-1)$.

(2) Wenn die Fläche, in Bezug auf welche die Polarflächen genommen werden, auch vom zweiten Grade ist mit einem Mittelpunkte; so ist die Umhüllungsfläche, d. h. die reciproke Polarfläche zu:

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1$$

eine dritte Fläche des zweiten Grades, deren Gleichung die folgende symmetrische Form hat:

$$a^2(D_xU)^2 + b^2(D_yU)^2 + c^2(D_zU)^2 = (u_1 + u_0)^2.$$

(3) Wenn der Pol auf einer Curve zweiter Ordnung mit einem Mittelpunkte bleiben muß, und die Polaren in Beziehung auf irgend eine Curve dritter Ordnung genommen werden; so ist die Umhüllungscurve von der vierten Ordnung, und wird durch die symmetrische Gleichung:

$$a^2(D_xU)^2 + b^2(D_yU)^2 = (u_2 + 2u_1 + 3u_0)^2$$

ausgedrückt, welches Resultat offenbar elegante Anwendungen in der Theorie der Curven dritter Ordnung gestattet. —

Achtes Kapitel.

Verschiedene Anwendungen des Operationscalculs auf Differential- und Integralrechnung.

1. Wenn $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ beliebige gegebene Functionen von x sind, so ist:

$$a_1 \boldsymbol{D} . a_2 \boldsymbol{D} . a_3 \boldsymbol{D} \ldots \boldsymbol{D} . a_n + (-1)^n a_n \boldsymbol{D} \ldots a_3 \boldsymbol{D} . a_2 \boldsymbol{D} . a_1,$$

ein genaues Differential.

Dieses Theorem ergibt sich leicht durch Induction; denn für zwei Functionen a_1, a_2 hat man:

$$a_1 \boldsymbol{D} . a_2 = \boldsymbol{D} . a_1 a_2 - a_2 \boldsymbol{D} . a_1,$$

folglich:

$$a_1 \boldsymbol{D} . a_2 + (-1)^2 a_2 \boldsymbol{D} . a_1 = \boldsymbol{D} . a_1 a_2,$$

ein genaues Differential.

Weiter ist:

$$a_1 \boldsymbol{D} a_2 \boldsymbol{D} a_3 = \boldsymbol{D} . a_1 a_2 \boldsymbol{D} a_3 - \boldsymbol{D} a_1 . a_2 \boldsymbol{D} a_3,$$

oder:

$$a_1 \boldsymbol{D} a_2 \boldsymbol{D} a_3 = \boldsymbol{D} . a_1 a_2 \boldsymbol{D} a_3 - \boldsymbol{D} . a_2 a_3 \boldsymbol{D} a_1 + a_3 \boldsymbol{D} a_2 \boldsymbol{D} a_1 \;;$$

folglich:

$$a_1 \boldsymbol{D} a_2 \boldsymbol{D} a_3 + (-1)^3 a_3 \boldsymbol{D} a_2 \boldsymbol{D} a_1 = \boldsymbol{D} . a_1 a_2 \boldsymbol{D} a_3 - \boldsymbol{D} . a_2 a_3 \boldsymbol{D} a_1,$$

wovon die rechte Seite offenbar ein genaues Differential ist. — U. s. f. Wenn also:

$$a_1 \boldsymbol{D} a_2 \boldsymbol{D} a_3 \ldots \boldsymbol{D} a_n$$

ein genaues Differential sein soll, so muß:

$$a_n D a_{n-1} D \ldots D a_2 D a_1 = 0$$

sein. —

2. Wenn n eine ungerade Zahl ist, und die Functionen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von der mittlern an in umgekehrter Ordnung wiederkehren; so gestattet das vorhergehende Theorem eine elegante Modification, und es läßt sich durch die eben angewandte Methode leicht zeigen, daß:

$$a_1 D a_2 D \ldots a_n \ldots D a_2 D a_1 + (-1)^n a_n (D a_{n-1} D a_{n-2} \ldots D a_2 D a_1)^2$$

ein genaues Differential ist. —

3. Wenn die Entwickelung des Operationssymboles:

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} \cdot D a_1 D a_2 \ldots D a_n$$

folgende ist:

$$C_n D^n + C_{n-1} D^{n-1} + \ldots + C_1 D + C_0,$$

so ist:

$$e^{\int C_{n-1} dx} = a_1 \cdot a_2^2 \cdot a_3^3 \ldots a_n^n$$

Wenn der Coefficient von D^{n-1} in der Entwickelung des Operationssymboles direct gefunden ist, so erhellet die Wahrheit dieses Theoremes sofort. — Man findet leicht:

$$\frac{D a_1}{a_1} + \frac{2 D a_2}{a_2} + \frac{3 D a_3}{a_3} + \ldots + \frac{n D a_n}{a_n} = C_{n-1},$$

folglich:

$$\int C_{n-1} dx = \log a_1 + 2 \log a_2 + 3 \log a_3 + \ldots + n \log a_n,$$

und mithin:

$$e^{\int C_{n-1} dx} = a_1 \cdot a_2^2 \cdot a_3^3 \ldots a_n^n.$$

4. Wenn die Entwickelung des auf irgend ein gegebenes Subject v angewandten Operationssymboles:

$$u_{n+1} D u_n D \ldots \ldots D u_2 D u_1$$

in der Form:

$$P_0 + P_1 D + P_2 D^2 + \ldots + P_n D^n,$$

gegeben ist, so läßt sich das Bildungsgesetz der Coefficienten P_0, $P_1, P_2, \ldots$, so wie das Gesetz ihrer gegenseitigen Abhängigkeit leicht angeben. — Man sieht in der That leicht ein, daß folgende Gleichheiten stattfinden:

$$P_0 = u_{n+1} D u_n D \ldots\ldots D u_2 D u_1 .,$$

$$P_1 = u_{n+1} D u_n D \ldots D u_2 u_1 . + u_{n+1} D \ldots D u_3 u_2 D u_1 . \\ + u_{n+1} D \ldots\ldots D u_4 u_3 D u_2 D u_1 . + \&c.$$

$$P_2 = u_{n+1} D u_n D \ldots D u_3 u_2 u_1 . + u_{n+1} D \ldots D u_4 u_3 u_2 D u_1 . + \&c.$$

.

.

.

$$P_n = u_{n+1} u_n \ldots\ldots u_3 u_2 u_1 .,$$

indem P_0 blos das Resultat der Anwendung des gegebenen symbolischen Operators auf die Einheit ist — und P_1 aus P_0 abgeleitet wird, wenn man die Summe aller der Glieder nimmt, welche durch successive Hinweglassung eines D in P_0 erhalten werden — und P_2 sich ebenso aus P_1 ꝛc. ergibt. —

5. Wenn die Entwickelung des auf irgend ein Subject v angewandten Operators:

$$u_1 D u_2 D \ldots\ldots D u_n D u_{n+1}$$

in der Form:

$$Q_0 + D Q_1 + D^2 Q_2 + \ldots + D^n Q_n,$$

gegeben ist; so hat man nach dem Vorhergehenden offenbar die folgenden Relationen:

$$Q_n = + P_n$$

$$Q_{n-1} = - P_{n-1}$$

$$Q_{n-2} = + P_{n-2}$$

.

.

.

$$Q_0 = (-1)^n P_0.$$

6. Wenn R irgend eine gegebene Function von x ist, so läßt sich der symmetrische symbolische Operator:

$$u_1 D u_2 D \ldots D u_n D u_{n+1} R u_{n+1} D u_n D \ldots D u_2 D u_1$$

offenbar auf die Form:

$$(-1)^n \{P_0 - DP_1 + D^2 P_2 - \ldots + (-1)^n D^n P_n\} R \{P_0 + P_1 D + P_2 D_2 + \ldots + P_n D^n\}$$

bringen, welche ihrerseits leicht auf die Form:

$$A_0 + DA_1 D + D^2 A_2 D^2 + \ldots + D^n A_n D^n$$

gebracht werden kann.

7. Die Integration der Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung:

$$D^n y + A_1 D^{n-1} y + A_2 D^{n-2} y + \ldots + A_{n-1} Dy + A_n y = X, \quad (1)$$

wo $A_1, A_2, A_3, \ldots$ gegebene Functionen der independenten Veränderlichen sind, läßt sich immer auf die Integration derselben Gleichung ohne zweiten Theil:

$$D^n u + A_1 D^{n-2} u + A_2 D^{n-1} u + \ldots + A_{n-1} Du + A_n u = 0. \quad (2)$$

zurückzuführen.

Denn es sei:

$$y = u_1 \int v_1\, dx,$$

wo u_1 nach der Voraussetzung der Gleichung (2) genügt; so ergibt sich durch Substitution in (1):

$$\left.\begin{array}{c} \{D^n u_1 \int v_1 dx + nD^{n-1} u_1 . v_1 + \ldots + nDu_1 . D^{n-2} v_1 \quad + u_1 . D^{n-1} v_1\} \\ + \\ A_1 \{D^{n-1} u_1 . \int v_1 dx + (n-1) D^{n-2} u_1 . v_1 + \ldots + (n-1) Du_1 . D^{n-3} v_1 + u_1\, D^{n-2} v_1\} \\ + \\ A_2 \{D^{n-2} u_1 . \int v_1 dx + (n-2) D^{n-3} u_1 . v_1 + \ldots + (n-2) Du_1 . D^{n-4} v_1 + u_1 . D^{n-3} v_1\} \\ + \, \&c. \end{array}\right\} = X$$

oder wenn man bemerkt, daß:

$$D^n u_1 + A_1 D^{n-1} u_1 + A_2 D^{n-2} u_1 + \ldots = 0$$

ist, die Reihenfolge umkehrt und mit u_1 dividirt:

$$D^{n-1}v_1 + B_2 D^{n-2}v_1 + B_3 D^{n-3}v_1 + \ldots = \frac{X}{u_1},$$

wo:

$$u_1 B_2 = nDu_1 + Au_1$$

$$u_1 B_3 = \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} D^2 u_1 + A_1 (n-1) Du_1 + A_2 u_2$$

&c.

ist. — Die Integration der Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung ist also auf die einer Gleichung derselben Form, aber von der $(n-1)^{ten}$ Ordnung zurückgeführt. —

Setzt man weiter:

$$v_1 = u_2 \int v_2 dx,$$

wo u_2 eine particuläre Auflösung der zuletzt erhaltenen Gleichung, aber ohne zweiten Theil, ist; so ist die Aufgabe auf die Integration der Gleichung:

$$D^{n-2}v_2 + C_3 D^{n-3}v_2 + C_4 D^{n-4}v_2 + \ldots = \frac{X}{u_1 u_2},$$

der $(n-2)^{ten}$ Ordnung zurückgeführt — und wenn man so fortfährt, auf die Integration der Gleichung:

$$Dw + Pw = \frac{X}{u_1 u_2 \ldots u_{n-1}}.$$

Setzt man hier:

$$w = u_n \int v_n dx,$$

so ergibt sich durch Substitution:

$$(Du_n + Pu_n) \cdot \int v_n dx + u_n v_n = \frac{X}{u_1 u_2 \ldots u_{n-1}};$$

und da nach der Voraussetzung u_n so beschaffen ist, daß:

$$Du_n + Pu_n = 0$$

ist; so hat man:

$$v_n = \frac{X}{u_1 u_2 u_3 \ldots u_{n-1} u_n};$$

und mithin ist endlich das gesuchte Integral:

$$y = u_1 \int u_2 \int u_3 \int \ldots \frac{X}{u_1 u_2 u_3 \ldots u_n} dx.$$

8. Das allgemeine Integral der Gleichung (1) läßt sich durch die n particulären Integrale der Gleichung (2) ausdrücken. — Denn es seien $U_1, U_2, U_3, \ldots U_n$ die n particulären Integrale der Gleichung (2), so ist:

$$u = C_1 U_1 + C_2 U_2 + C_3 U_3 + \ldots + C_n U_n.$$

Dividirt man beide Seiten dieser letzten Gleichung mit U_1 und differentiirt; so wird die Constante C_1 eliminirt, und man hat:

$$D \frac{u}{U_1} = C_2 D \frac{U_2}{U_1} + C_3 D \frac{U_3}{U_1} + \ldots + C_n D \frac{U_n}{U_1}.$$

Werden beide Seiten dieser letzten Gleichheit durch den Coefficienten von C_2 dividirt und dann differentiirt, so wird C_2 eliminirt — und wenn man so fortfährt; so erhält man zuletzt:

$$D \frac{1}{V_n} D \frac{1}{V_{n-1}} D \frac{1}{V_{n-2}} \ldots D \frac{1}{V_2} D \frac{1}{U_1} . u = 0,$$

wo:

$$V_2 = D \frac{U_2}{U_1}$$

$$V_3 = D \frac{D \frac{U_3}{U_1}}{D \frac{U_2}{U_1}},$$

&c.

ist. — Der hieraus abgeleitete Coefficient von $D^n u$ ist aber offenbar:

$$\frac{1}{V_n V_{n-1} V_{n-2} \ldots U_1};$$

und wenn man hierdurch dividirt, um den Coefficienten von $D^n u$ der Einheit gleich zu machen; so erhält man das Resultat:

$$V_n V_{n-1} V_{n-2} \ldots U_1 D \frac{1}{V_n} D \frac{1}{V_{n-1}} D \frac{1}{V_{n-2}} \ldots D \frac{1}{U_1} . u,$$

welches der linken Seite der Gleichung (2) gleich sein muß, oder das Resultat der Operation an y muß $= X$ sein; d. h. es ist:

$$y = U_1 \int D\frac{U_2}{U_1} \int D \frac{D\frac{U_3}{U_1}}{\frac{U_2}{U_1}} \int \ldots \int \frac{X dx}{U_1 D \frac{U_2}{U_1} \ldots}.$$

9. Aus der Vergleichung des in Nr. 7 und Nr. 8 Gesagten ist einleuchtend, daß sich die Auflösungen der successiven reducirten Gleichungen in Nr. 7 durch die n particulären Auflösungen der Gleichung (2) ausdrücken lassen; denn man hat:

$$u_2 = D\frac{U_2}{U_1}$$

$$u_3 = D \frac{D\frac{U_3}{U_1}}{D\frac{U_2}{U_1}} \text{ \&c.}$$

Ferner ist offenbar:

$$u_n u_{n-1} \ldots u_2 u_1 D \frac{1}{u_n} D \frac{1}{u_{n-1}} \ldots D \frac{1}{u_2} D \frac{1}{u_1} . y = X,$$

oder jede lineare Differentialgleichung:

$$\Phi(D) y = X$$

kann wie ein Monom geschrieben werden, wenn man die particulären Auflösungen von:

$$\Phi (D y = 0$$

finden kann. —

10. Wir wollen nun das Resultat der Operation mit der symbolischen Form:

$$A_n D^n + A_{n-1} D^{n-1} + \ldots + A_1 D + A_0 = \Phi,$$

wo A_n, $A'_{n-1}, \ldots A_0$ gegebene Functionen der independenten Veränderlichen sind, an dem Producte uv zweier Functionen u, v suchen. —

Wenn $F(D)$ eine algebraische Function von D, wie:

$$A_n D^n + A_{n-1} D^{n-1} + \ldots + A_1 D + A_0,$$

ist, wo $A_n, A_{n-1}, \ldots A_0$ Constanten sind; so ist nach Kap. 2:

$$F(D) \,.\, uv = F(D)\, v + \frac{Du}{1} \,.\, F'(D) v + \frac{D^2 u}{1\,.\,2} \,.\, F''(D) v + \text{\&c.},$$

oder was offenbar dasselbe ist:

$$F(D) uv = F(D)\, v \,.\, u + \frac{1}{1} D_D F(D) v \,.\, Du + \frac{1}{1\,.\,2} D_D^2 F(D) v \,.\, D^2 u$$
$$+ \text{\&c.}$$

Aus der Herleitungsweise dieses Theoremes erhellet leicht, daß, wenn A_n, $A_{n-1}, \ldots A_0$ keine Constanten mehr, sondern gegebene Functionen der independenten Veränderlichen sind, man hat:

$$\Phi \,.\, uv = \Phi v \,.\, u + \frac{1}{1} D_D \Phi v \,.\, Du + \frac{1}{1\,.\,2} D_D^2 \Phi v \,.\, D^2 u + \text{\&c.}$$

und ebenso:

$$u \Psi \,.\, v = \Psi \,.\, uv - \frac{1}{1} D_D \Psi \,.\, Du \,.\, v + \frac{1}{1\,.\,2} D_D^2 \Psi \,.\, D^2 u \,.\, v - \text{\&c.}$$

wo:

$$\Psi = D^n A_n + D^{n-1} A_{n-1} + \ldots + D A_1 + A_0.$$

11. Wenn $\pi, \varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ Operationssymbole von solcher Beschaffenheit sind, daß, indem u irgend ein Operationssubject bedeutet, die Gleichheiten stattfinden:

$$\left.\begin{array}{r}
(\pi\varrho - \varrho\pi) \,.\, u = \varrho_1 \,.\, u \\
(\pi\varrho_1 - \varrho_1\pi) \,.\, u = \varrho_2 \,.\, u \\
(\pi\varrho_2 - \varrho_2\pi) \,.\, u = \varrho_3 \,.\, u \\
\cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \\
(\pi\varrho_{n-1} - \varrho_{n-1}\pi) \,.\, u = \varrho_n \,.\, u;
\end{array}\right\} (\alpha)$$

alsdann ist:

$$f(\pi)\varrho \,.\, u = \varrho f(\pi) \,.\, u + \frac{\varrho_1}{1} \,.\, f'(\pi) \,.\, u + \frac{\varrho_2}{1\,.\,2} f''(\pi) \,.\, u + \ldots \quad (1)$$

$$\varrho f(\pi) \,.\, u = f(\pi)\varrho \,.\, u - f'(\pi)\frac{\varrho_1}{1} \,.\, u + f''(\pi)\frac{\varrho_2}{1\,.\,2} \,.\, u - \ldots \quad (2)$$

$$f\left(\pi + \frac{1}{\varrho}\varrho_1\right) . u = f(\pi) \,.\, u + \frac{1}{\varrho}\frac{\varrho_1}{1} f'(\pi) u + \frac{1}{\varrho}\frac{\varrho_2}{1\,.\,2} f''(\pi) \,.\, u + \ldots \quad (3)$$

$$f\left(\pi - \varrho_1\frac{1}{\varrho}\right) . u = f(\pi) \,.\, u - f'(\pi)\frac{\varrho_1}{1} \,.\, \frac{1}{\varrho} \,.\, u + f''(\pi)\frac{\varrho_2}{1\,.\,2}\frac{1}{\varrho} u - \ldots \quad (4)$$

wo f wieder eine ganze rationale Function bezeichnet. —

Um diese Theoreme zu beweisen, wollen wir die Gleichheiten (α) ohne das Subject u hinsetzen:

$$\begin{array}{c}
\pi\varrho - \varrho\pi = \varrho_1 \\
\pi\varrho_1 - \varrho_1\pi = \varrho_2 \\
\pi\varrho_2 - \varrho_2\pi = \varrho_3 \\
\cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \\
\pi\varrho_{n-1} - \varrho_{n-1}\pi = \varrho_n \,,
\end{array}$$

so ergibt sich, wenn auf beiden Seiten der ersten mit π operirt wird:

$$\pi^2\varrho = \pi\varrho_1 + (\varrho_1 + \varrho\pi)\pi,$$

oder:

$$\pi^2\varrho = \varrho\pi^2 + 2\varrho_1\pi + \varrho_2.$$

Ebenso ergibt sich:

$$\pi^3\varrho = \varrho\pi^3 + 3\varrho_1\pi^2 + 3\varrho_2\pi + \varrho_3,$$

nnd allgemein:

$$\pi^n\,\varrho = \varrho\pi^n + n\varrho_1\pi^{n-1} + \frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}\,\varrho_2\pi^{n-2} + \ldots,$$

folglich:

$$f(\pi)\,\varrho = \varrho f(\pi) + \frac{\varrho_1}{1}f'(\pi) + \frac{\varrho_2}{1\,.\,2}f''(\pi) + \ldots,$$

welches durch Wiedereinsetzung des Subjectes u das erste Theorem gibt. —

Zur Ableitung des zweiten setze man:

$$\varrho\pi = \pi\varrho - \varrho_1,$$

also, wenn mit jeder Seite dieser Gleichheit an π operirt wird:

$$\varrho\pi^2 = \pi^2\varrho - 2\pi\varrho_1 + \varrho_2,$$

und allgemein:

$$\varrho\pi^n = \pi^n\,\varrho - n\pi^{n-1}\varrho_1 + \frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}\pi^{n-2}\varrho_2 - \ldots;$$

folglich:

$$\varrho f(\pi) = f(\pi)\,\varrho - f'(\pi)\frac{\varrho_1}{1} + f''(\pi)\frac{\varrho_2}{1\,.\,2} - \ldots,$$

woraus durch Herstellung des Subjectes u das zweite Theorem folgt. —

Zur Ableitung des dritten Theoremes bemerke man, daß:

$$\pi + \frac{1}{\varrho}\varrho_1 = \frac{1}{\varrho}\pi\varrho$$

ist, woraus blos abzuleiten ist, daß:

$$f\left(\frac{1}{\varrho}\pi\varrho\right) = f(\pi) + \frac{1}{\varrho}\,\frac{\varrho_1}{1}\,f'(\pi) + \frac{1}{\varrho}\,\frac{\varrho_2}{1\,.\,2}\,f''(\pi) + \ldots;$$

oder:

$$f\left(\frac{1}{\varrho}\pi\varrho\right) = \frac{1}{\varrho}\,\{\,\varrho f(\pi) + \frac{\varrho_1}{1}\,f'(\pi) + \frac{\varrho_2}{1\,.\,2}\,f''(\pi) + \ldots\}.$$

Dieses kann aber leicht geschehen; denn man hat:

$$\left(\frac{1}{\varrho}\pi\varrho\right)^2=\left(\frac{1}{\varrho}\pi\varrho\right).\left(\frac{1}{\varrho}\pi\varrho\right)=\frac{1}{\varrho}\pi^2\varrho,$$

$$\left(\frac{1}{\varrho}\pi\varrho\right)^3=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{1}{\varrho}\pi^3\varrho,$$

und im Allgemeinen:

$$f\left(\frac{1}{\varrho}\pi\varrho\right)=\frac{1}{\varrho}f(\pi)\varrho,$$

woraus sich das fragliche Theorem ergibt, wenn für $f(\pi)\varrho$ sein Werth aus dem ersten Theoreme gesetzt wird. —

Ebenso leicht kann das vierte Theorem bewiesen werden.

Beispiele.

(1) Es sei $\pi=D$, $\varrho=X$, so ist:

$$DX-XD=X'=\varrho_1,$$

$$DX'-X'D=X''=\varrho_2,$$

&c.,

und folglich:

$$f(D)X.u=Xf(D).u+\frac{X'}{1}.f'(D).u+\frac{X''}{1.2}.f''(D).u+\&c.,$$

$$f\left(D+\frac{X'}{X}\right).u=f(D).u+\frac{1}{1}\frac{X'}{X}.f'(D).u+\frac{1}{1.2}\frac{X''}{X}.f''(D).u+\&c.$$

(2) Wenn:

$$\pi=x,\quad \varrho=\varphi(D)$$

ist, so hat man wegen:

$$x\varphi(D)-\varphi(D)x=-\varphi'(D)=\varrho_1,$$

$$-x\varphi'(D)+\varphi'(D)x=+\varphi''(D)=\varrho_2,$$

&c.

offenbar:

$$f\left(x-\frac{\varphi'(D)}{\varphi(D)}\right).u=\frac{1}{\varphi(D)}\left\{\varphi(D)f(x)-\varphi'(D)\frac{f(x)}{1}+\varphi''(D)\frac{f''(x)}{1.2}\right.$$
$$\left.-\&c.\right\}.u.$$

Neuntes Kapitel.

Anwendungen des Operationscalculs auf die endliche Differenzen- und Summenrechnung.

1. Es ergibt sich leicht, daß $f(x+h)$ durch das Symbol:

$$e^{hD}.f(x),$$

dargestellt wird, wenn der Kürze wegen der Index x an dem Zeichen D hinweggelassen wird.*) Hieraus folgt:

$$e^{D}.f(x) = f(x+1),$$

und mithin ist:

$$e^{D}.f(x) - f(x) = f(x+1) - f(x);$$

oder:

$$(e^{D}-1).f(x) = \triangle . f(x).$$

Durch Wiederholung dieser Operation ergibt sich:

$$(e^{D}-1)^{n}.f(x) = \triangle^{n}.f(x),$$

2. Setzt man $f(x) = u_x$, $f(x+1) = u_{x+1}, \ldots f(x+n) = u_{x+n}$; so erhält man aus der letzten Gleichheit durch Entwickelung sofort:

$$\triangle^{n}.u_x = u_{x+n} - \frac{n}{1}.u_{x+n-1} + \frac{n.n-1}{1.2}.u_{x+n-2} - \text{\&c.}$$

und allgemeiner:

$$F(\triangle).u_x = F(e^{D}-1).u_x,$$

wo F irgend eine algebraische Function bedeutet. —

3. Da zwei Functionen desselben Symboles commutativ sind, und wegen:

*) S. Zusatz 2.

$$e^D - 1 = \triangle,$$

offenbar $\triangle$ eine Function von D ist; so sind $\triangle$ und D commutativ. — Aus der letzten Gleichheit, oder direct, erhält man:

$$e^D = \triangle + 1;$$

folglich auch:

$$e^{nD} . u_x = (1 + \triangle)^n . u_x,$$

oder:

$$u_{x+n} = u_x + \frac{n}{1} . \triangle u_x + \frac{n . n-1}{1 . 2} . \triangle^2 u_x + \&c.$$

und allgemeiner:

$$F(e^D) . u_x = F(1 + \triangle) . u_x.$$

4. Aus der Gleichheit:

$$\triangle^n . f(x) = f(x+n) - \frac{n}{1} . f(x+n-1) + \frac{n . n-1}{1 . 2} f . (x+n-2) - \&c.,$$

ergibt sich für $x = 0$ das merkwürdige Theorem:

$$\triangle^n . f(0) = f(n) - \frac{n}{1} . f(n-1) + \frac{n . n-1}{1 . 2} . f(n-2) - \&c.,$$

und als ein besonderer Fall:

$$\triangle^n . 0^m . = n^m - \frac{n}{1} . (n-1)^m + \frac{n . n-1}{1 . 2} . (n-2)^m - \&c.,$$

worin die linke Seite so lange $= 0$ ist, als $m < n$ ist. —

Ebenso erhält man aus der Gleichheit:

$$f(x+n) = f(x) + \frac{n}{1} . \triangle f(x) + \frac{n . n-1}{1 . 2} . \triangle^2 f(x) + \&c.$$

für $x = 0$ das Theorem:

$$f(n) = f(0) + \frac{n}{1} . \triangle f(0) + \frac{n . n-1}{1 . 2} . \triangle^2 f(0) + \&c.,$$

und als besondern Fall:

$$n^m = \frac{n \cdot n-1 \ldots n-m+1}{1 \cdot 2 \ldots m} \cdot \Delta^m 0^m + \text{\&c.},$$

weil die früheren Glieder verschwinden. —

In Bezug auf den Ausdruck:

$$\Delta^n \cdot 0^m,$$

mag bemerkt werden: daß derselbe eine bloße conventionelle Bezeichnung ist, welche weiter nichts sagt: als daß, nachdem an x^m die durch Δ^n angedeutete Operation verrichtet ist, $x=0$ gesetzt und das Resultat genommen ist. — Und allgemeiner ist:

$$\Delta^n \cdot f(0) = \{\Delta^n f(x)\}_{x=0}.$$

5. So wie Δ als Function von D durch die Gleichheit:

$$\Delta = e^D - 1,$$

gegeben wird, ebenso wird D als Function von Δ durch die Gleichheit:

$$D = \log(1+\Delta),$$

bestimmt, woraus folgt:

$$D^n \cdot u_x = \log^n(1+\Delta) \cdot u_x,$$

oder allgemeiner:

$$F(D) \cdot u_x = F\{\log(1+\Delta)\} \cdot u_x,$$

wo F irgend eine allgebraische Function bedeutet. —

Es ist zu bemerken: daß alle vorhergehenden Theoreme auch für negative Potenzen von Δ gelten, weil Δ^{-1} distributiv ist und D, Δ commutativ sind. —

6. Wir wollen jetzt die n^{te} Differenz einer Function $f(x) = u_x$ durch positive Potenzen ihrer Differentialquotienten auszudrücken suchen. — Bekanntlich ist:

$$\Delta^n = (e^D - 1)^n,$$

und mithin kann man offenbar setzen:

$$\Delta^n = \{A_0 + A_1 D + A_2 D^2 + A_3 D^3 + \ldots\},$$

wo $A_0, A_1, A_2, \ldots$ zu bestimmende Größen sind. —

Da die Werthe dieser Constanten offenbar von der besondern Beschaffenheit des Subjectes, woran operirt wird, unabhängig sind, so kann man das Operationssubject so wählen, daß man leicht zur Ermittelung dieser Constanten gelangt. — Nimmt man aber auf beiden Seiten der letzten Gleichheit x^m zum Operationssubjecte, und setzt nach verrichteten Operationen $x = 0$; so verschwinden beide Seiten der Gleichheit so lange, als $m < n$ ist, und wenn $m \overline{\overline{>}} n$ ist; so hat man:

$$A_m = \frac{\Delta^n . 0^m}{\overline{m}}.$$

und folglich:

$$\Delta^n . u_x = \left\{ \frac{\Delta^n . 0^n}{\overline{n}} D^n + \frac{\Delta^n . 0^{n+1}}{\overline{n+1}} D^{n+1} + \ldots \right\} . u_x.$$

7. Zu den bereits in Kap. 2 angeführten, von Hargreave herrührenden Theoremen der Differentialrechnung:

$$F(D) . uv = u . F(D)\, v + \frac{Du}{1} . F'(D) v + \frac{D^2 u}{1 . 2} . F''(D)\, v + \&c.,$$

und:

$$u . F(D) v = F(D) . uv - F'(D) . \frac{Du}{1} . v + F''(D) . \frac{D^2 u}{1 . 2} . v - \&c.$$

hat Curtis die beiden analogen Theoreme der Differenzenrechnung:

$$F(\Delta) . u_x v_x = u_x . F(\Delta) v_x + \frac{\Delta u_x}{1} . F'(\Delta) v_{x+1} + \frac{\Delta^2 u_x}{1 . 2} . F''(\Delta) v_{x+2} + \&c.$$

und:

$$u_x . F(\Delta) v_x = F(\Delta) . u_x v_x - F'(\Delta) . \frac{\Delta u_x}{1} . v_{x+1} + F''(\Delta) . \frac{\Delta^2 u_x}{1 . 2} . v_{x+2} - \&c.$$

gefunden. —

8. Offenbar hat man:

$$\triangle . a^x = (a-1) . a^x .$$

Wird auf beiden Seiten ein zweites Mal mit $\triangle$ operirt, so ergibt sich:

$$\triangle^2 . a^x = (a-1)^2 . a^x ,$$

und allgemein durch p malige Operation mit $\triangle$:

$$\triangle^p . a^x = (a-1)^p . a^x .$$

Hieraus ergibt sich, wenn F irgend eine algebraische Function bedeutet:

$$F(\triangle) . a^x = F(a-1) . a^x ,$$

und allgemeiner:

$$F(\triangle) . Ca^x = F(a-1) . Ca^x .$$

wo C eine beliebige Constante ist. —

9. Da dieses letzte Theorem sowohl für inverse, wie für directe Functionen gilt; so ist klar: daß dasselbe sofort zur Auflösung endlicher Differenzengleichungen mit constanten Coefficienten $P, Q, R, \ldots$ von der Form:

$$\triangle^n u_x + P\triangle^{n-1} . u_x + Q\triangle^{n-2} . u_x + \ldots + Tu_x = f(e^x, \sin x, \cos x),$$

oder:

$$F(\triangle) . u_x = \Sigma M e^{mx},$$

angewandt werden kann, wo m positiv, oder negativ, ganz, oder gebrochen, reell, oder imaginär sein kann. —

Die Auflösung einer solchen Gleichung wird offenbar durch die symbolische Form:

$$u_x = \Sigma M \frac{e^{mx}}{F(e^m - 1)} + \frac{1}{F(\triangle)} . 0$$

gegeben, deren algebraischer oder analytischer Ausdruck von der Beschaffenheit der Wurzeln der Gleichung:

$$F(\triangle) = 0$$

abhängt. — Wenn diese Wurzeln alle reell und ungleich sind, so ist der arbiträre Theil der Auflösung:

$$C_1 (\alpha + 1)^x + C_2 (\beta + 1)^x + C_3 (\gamma + 1)^x + \&c.$$

Haben p dieser Wurzeln den gemeinschaftlichen Werth α, so ist dieser Theil:

$$C_1 (\alpha + 1)^x \,.\, x^{p-1} + C'_1 (\alpha + 1)^x \,.\, x^{p-2} + \ldots + C_2 (\beta + 1)^x + \&c.$$

und wenn endlich auch Paare imaginärer Wurzeln vorkommen; so ist derselbe:

$$C_1 \{\alpha + \beta\sqrt{-1} + 1\}^x + C_2 \{\alpha - \beta\sqrt{-1} + 1\}^x + C_3 (\gamma + 1)^x + \&c.$$

Beispiele

(1) Es sei gegeben:

$$\Delta^2 \,.\, u_x + a^2 \,.\, u_x = \cos mx.$$

oder:

$$\Delta^2 \,.\, u_x + a^2 \,.\, u_x = \tfrac{1}{2} \{ e^{mx\sqrt{-1}} + e^{-mx\sqrt{-1}} \};$$

so ergibt sich als Auflösung sofort:

$$u_x = \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{e^{mx\sqrt{-1}}}{(e^{m\sqrt{-1}} - 1)^2 + a^2} + \frac{e^{-mx\sqrt{-1}}}{(e^{-m\sqrt{-1}} - 1) + a^2} \right\}$$
$$+ C_1 (1 + a\sqrt{-1})^x + C_2 (1 - a\sqrt{--1})^x.$$

(2) Die gegebene Gleichung sei:

$$\Delta^2 \,.\, u_x - 2a\Delta \,.\, u_x + a^2 u_x = \sin mx.$$

oder:

$$(\Delta - a)^2 . u_x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \{ e^{mx\sqrt{-1}} - e^{-mx\sqrt{-1}} \},$$

so ist die Auflösung:

$$u_x = \frac{1}{2\sqrt{-1})} \left\{ \frac{e^{mx\sqrt{-1}}}{(e^{m\sqrt{-1}} - 1 - a)^2} - \frac{e^{-mx\sqrt{-1}}}{(e^{-m\sqrt{-1}} - 1 - a)^2} \right\}$$
$$+ C_1 (a + 1)^x \,.\, x + C_2 (a + 1)^x.$$

10. Man bemerkt leicht, daß es eine ähnliche allgemeine Auflösungsmethode für die Gleichung:

$$u_{x+n}+Pu_{x+n-1}+Qu_{x+n-2}+\ldots+Tu_x=f(e^x, \sin x, \cos x)$$

geben wird, welche offenbar auf die symbolische Form:

$$e^{nD}.u_x+Pe^{(n-1)D}.u_x+Qe^{(n-2)D}.u_x+\ldots+Tu_x=\Sigma Me^{mx},$$

oder:

$$F(e^D).u_x=\Sigma Me^{mx},$$

gebracht werden kann, wo m positiv, oder negativ, ganz, oder gebrochen, reell, oder imaginär sein darf.

Nun läßt sich leicht wie in der vorhergehenden Nr. zeigen, daß:

$$F(e^D).C\alpha^x=F(\alpha).C\alpha^x$$

ist, und mithin ist die symbolische Auflösung der fraglichen Differenzengleichung:

$$u_x=\Sigma M\frac{e^{mx}}{F(e^m)}+\frac{1}{F(e^D)}.0,$$

deren wirklicher Werth wieder von der Beschaffenheit der Wurzeln der Gleichung:

$$F(e^D)=0$$

abhängt. —

Es wird die Untersuchung des Falles genügen, wo alle Wurzeln dieser letzten Gleichung reell und ungleich sind, weil sich alsdann das Resultat für die beiden andern Fälle nach der vorhergehenden Nr. auf der Stelle ergibt. — In diesem Falle hat der arbiträre Theil der Auflösung die Form:

$$C_1\alpha^x+C_2\beta^x+C_3\gamma^x+\ldots$$

und wenn man bemerkt, daß die allgemeine Gleichung der gegenwärtigen Nr. auf die Form:

$$(\Delta+1)^n.u_x+P(\Delta+1)^{n-1}.u_x+\ldots+Tu_x=f(e^x, \sin x, \cos x),$$

oder:

$$F(\Delta+1).u_x=\Sigma Me^{mx}$$

gebracht werden kann; so ergibt sich das Weitere sofort aus der Vergleichung der gegenwärtigen Nr. mit der vorhergehenden. —

Beispiele.

(1) Es sei die Gleichung:

$$u_{x+2} + a^2 . u_x = \cos mx$$

gegeben, so läßt sich dieselbe offenbar auf die Form:

$$e^{2D} . u_x + a^2 . u_x = \tfrac{1}{2} \{ e^{mx\sqrt{-1}} + e^{-mx\sqrt{-1}} \},$$

bringen, und die Auflösung ist:

$$u_x = \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{e^{mx\sqrt{-1}}}{e^{2m\sqrt{-1}} + a^2} + \frac{e^{-mx\sqrt{-1}}}{e^{-2m\sqrt{-1}} + a^2} \right\} + C_1 (a\sqrt{-1})^x + C_2 (-a\sqrt{-1})^x$$

(2) Die gegebene Gleichung sei:

$$u_{x+2} - 2au_{x+1} + a^2 u_x = \sin mx.$$

oder:

$$(e^D - a)^2 . u_x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \{ e^{mx\sqrt{-1}} - e^{-mx\sqrt{-1}} \},$$

so ist die Auflösung derselben:

$$u_x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ \frac{e^{mx\sqrt{-1}}}{(e^{m\sqrt{-1}} - a)^2} - \frac{e^{-mx\sqrt{-1}}}{(e^{-m\sqrt{-1}} - a)^2} \right\} + C_1 a^x . x + C_2 a^x.$$

11. Wenn man auf beiden Seiten des Theoremes in Kap. 6 Nr. 3 mit:

$$e^{\varphi x D_x + \psi y D_y + \&c.}$$

operirt, so findet man leicht:

$$e^{2(\varphi x D_x + \psi y D_y + \&c.} f(x,y,\&c.) = f \{ \Phi^{-1} (\Phi x + 2), \Psi^{-1} (\Psi y + 2), \&c. \},$$

und allgemein:

$$e^{m(\varphi x D_x + \psi y D_y + \&c.} f(x,y,\&c.) = f \{ \Phi^{-1} (\Phi x + m), (\Psi^{-1} (\Psi y + m), \&c. \}$$

Wenn also die Form von f als unbekannt, und die von Φ, Ψ

als gegeben betrachtet werden, so wird die Auflösung der endlichen Differenzengleichung mit constanten Coefficienten:

$$\left.\begin{array}{c} Af\{\Phi^{-1}(\Phi x+a),\ \Psi^{-1}(\Psi y+a)\} \\ + \\ Bf\{\Phi^{-1}(\Phi x+b),\ \Psi^{-1}(\Psi y+b)\} \\ +\&c. \end{array}\right\} = 0,$$

auf die Auflösung der symbolischen partiellen Differentialgleichung:

$$Ae^{a(\varphi x D_x+\psi y D_y)}z + Be^{b(\varphi x D_x+\psi y D_y)}z + \&c. = 0$$

zurückgeführt, welche der Kürze wegen durch:

$$F(e^{\varphi x D_x+\psi y D_y})\,z = 0,$$

oder nach dem Frühern durch:

$$F(e^{D_\xi+D_\eta})\,z = 0$$

ausgedrückt werden kann. — Sind nun die Wurzeln der Gleichung:

$$F(p) = 0$$

alle reell und ungleich, so ist die symbolische Auflösung der fraglichen partiellen Differentialgleichung:

$$z = (e^{D_\xi+D_\eta} - m)^{-1}.0 + (e^{D_\xi+D_\eta} - n)^{-1}.0 + \&c$$

wo $m, n, \ldots$ die Wurzeln von $F(p) = 0$ sind. — Aber nach einem frühern Theoreme (Kap. 2, Nr. 1) ist:

$$\chi(D_\xi + D_\eta)\,.\,f_m(e^\xi, e^\eta) = \chi(m)\,.\,f_m(e^\xi, e^\eta),$$

wo f_m eine homogene Function des m^{ten} Grades ist. Folglich ist die Auflösung der symbolischen partiellen Differentialgleichung, und mithin die der endlichen Differenzengleichung, wenn $\log m$ statt m gesetzt wird:

$$z = u_{\log m}(e^\xi, e^\eta) + u_{\log n}(e^\xi, e^\eta) + \&c.,$$

wo die Form von $u_{\log m}, u_{\log n}, \ldots$ willkürlich ist; aber der Grad resp. durch $\log m, \log n, \ldots$ angegeben wird. — Werden endlich die

willkürlichen Constanten $c, d, \ldots$ eingeführt, wie es offenbar geschehen muß, und dann für $\xi + c, \eta + d \ldots$, ihre Werthe gesetzt; so erhält man die Auflösung in der Form:

$$z = u_{\log m}(e^{\Phi x}, e^{\Psi y}) + u_{\log n}(e^{\Phi x}, e^{\Psi y}) + \&c.$$

Wenn die Gleichung $F(p) = 0$ Paare imaginärer Wurzeln hat, so nimmt die gesuchte Auflösung die Form an:

$$z = u_{\log(m+n\sqrt{-1})}(e^{\Phi x}, e^{\Psi y}) + u_{\log(m-n\sqrt{-1})}(e^{\Phi x}, e^{\Psi y}) + \&c. + u_{\log p} + \&c.$$

und wenn endlich dieselbe Gleichung α Wurzeln, jede $= m$ hat; so ist die Form der Auflösung:

$$z = u_{\log m}(e^{\Phi x}, e^{\Psi y}).(\Phi x + \Psi y)^{\alpha-1} + v_{\log m}(e^{\Phi x}, e^{\Psi y}).(\Phi x + \Psi y)^{\alpha-2} + \&c$$
$$+ u_{\log n}(e^{\Phi x}, e^{\Psi y}) + \&c.,$$

wo $u_{\log m}, v_{\log m}$ verschiedene arbiträre homogene Functionen desselben Grades sind.

12. Wir können offenbar jetzt auch eine Differenzengleichung von der Form:

$$A\varphi(x + a, y + a, \&c.) + B\varphi(x + b, y + b, \&c.) + \&c. = 0,$$

oder allgemeiner, von der Form:

$$\Sigma A\varphi(x + a, y + a, \&c.) = f(e^x, \sin x, e^y, \sin y, \&c.),$$

auflösen, deren rechte Seite auf die Form:

$$\Sigma A_{p,q,\&c.}\, e^{px+qy+\&c.}$$

gebracht werden kann, wo $p, q, \ldots$ positiv, oder negativ, ganz, oder gebrochen, reell, oder imaginär sein dürfen. —

Denn bringt man die Gleichung auf die Form:

$$F(e^{D_x + D_y})\,\varphi(x, y\ \&c.) = \Sigma A_{p,q,\&c.}\, e^{px+qy+\&c.},$$

so erhält man die Auflösung in der Form:

$$\varphi = \Sigma A_{p,q,\&c.} \cdot \frac{e^{px+qy+\&c.}}{F(e^{p+q+\&c.})} + u_{\log m}(e^x, e^y, \&c.) + \&c.$$

indem die Wurzeln von $F(p) = 0$ der Einfachheit wegen sämmtlich als reell und ungleich angenommen sind. —

Offenbar ist die Auflösung einer Differenzengleichung mit nur einer Veränderlichen, blos ein specieller Fall der vorhergehenden Auflösung. —

13. Wenn die aufzulösende Gleichung auf die Form:

$$F(e^D) \,.\, u_x + A_x u_x = B_x,$$

gebracht werden kann, wo A_x, B_x gegebene Functionen von x sind; so kann man ein ähnliches Verfahren, wie das in den ersten Nrn. in Kap. 4 anwenden. — Denn operirt man auf beiden Seiten der letzten Gleichheit mit:

$$\frac{1}{F(e^D)}$$

so ergibt sich:

$$u_x + \frac{1}{F(e^D)} A_x u_x = \frac{1}{F(e^D)} B_x + \frac{1}{F(e^D)} 0,$$

oder:

$$u_x + \frac{1}{F(e^D)} A_x u_x = \frac{1}{F(e^D)} B_x + \Sigma C_a a^x,$$

wo das letzte Glied die gewöhnliche Ergänzungsfunction in der Voraussetzung ist, daß die Wurzeln der Gleichung $F(u) = 0$ alle reell und ungleich sind, was jedoch auf die Allgemeinheit der Methode keinen Einfluß hat. —

Sondert man nun auf der linken Seite den Operator von seinem Subjecte ab, und operirt mit der Entwickelung seiner Umkehrung auf der rechten Seite; so erhält man die Auflösung:

$$u_x = \left\{ \begin{array}{c} \left\{ 1 - \frac{1}{F(e^D)} A_x + \frac{1}{F(e^D)} A_x \,.\, \frac{1}{F(e^D)} A_x - \&c. \right\} \frac{1}{F(e^D)} B_x \\ + \\ \left\{ 1 - \frac{1}{F(e^D)} A_x + \frac{1}{F(e^D)} A_x \,.\, \frac{1}{F(e^D)} A_x - \&c. \right\} \Sigma C_a a^x \end{array} \right.$$

deren weitere Reduction von der besondern Form der gegebenen Functionen A_x, B_x abhängt. —

14. Als ein Erläuterungsbeispiel wollen wir die bekannte lineare Differenzengleichung der ersten Ordnung:

$$u_{x+1} - A_x u_x = B_x$$

betrachten. — Wird diese Gleichung auf die symbolische Form:

$$e^D u_x - A_x u_x = B_x$$

gebracht, so hat man:

$$u_x - \frac{1}{e^D} A_x u_x = B_{x-1} + 0;$$

folglich:

$$u_x = \begin{cases} \{1 + \frac{1}{e^D} A_x + \frac{1}{e^D} A_x \cdot \frac{1}{e^D} A_x + \&c.\} B_{x-1} \\ + \text{Auflösung von } v_{x-1} - A_x v_x = 0), \end{cases}$$

oder:

$$u_x = \begin{cases} \{B_{x-1} + A_{x-1} B_{x-2} + A_{x-1} A_{x-2} B_{x-3} + \&c.\} \\ + C A_{x-1} A_{x-2} \ldots A_2 A_1, \end{cases}$$

oder in der gewöhnlichen Bezeichnung:

$$u_x = P A_{x-1} \{\Sigma \frac{B_x}{P A_x} + C\},$$

wo C eine willkürliche Constante ist. —

Beispiel.

Die gegebene Gleichung sei:

$$u_{x+1} - a u_x = x^m,$$

so ist:

$$u_x = \{(x-1)^m + a(x-2)^m + a^2(x-3)^m + \&c.\} + C a^x.$$

Die Auflösung dieser Gleichung kann auch durch:

$$u_x = -\frac{1}{a}\{x^m + \frac{(x+1)^m}{a} + \frac{(x+2)^m}{a^2} + \&c.\} + Ca^x,$$

ausgedrückt werden, weil die symbolische Auflösung auf die Form:

$$u_x = -\frac{1}{a-e^D}x^m + \frac{1}{e^D-a}0$$

gebracht werden kann. — Es ist also:

$$+\frac{1}{a}\{a(x-1)^m + a^2(x-2)^m + a^3(x-3)^m + \&c.\}$$

$$= -\frac{1}{a}\{x^m + \frac{(x+1)^m}{a} + \frac{(x+2)^m}{a^2} + \&c.\}.$$

15. Wenn:

$$(x)_m = x(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1),$$

ist, so ist auch:

$$(x+1)_m = (x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+m),$$

und folglich:

$$\triangle(x)_m = m(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1).$$

Demnach ist:

$$x\triangle . (x)_m = m . (x)_m,$$

und durch wiederholte Operation:

$$(x\triangle)^p . (x_m) = (m)^p . (x)_m.$$

Man erhält hieraus zu dem in Kap. 2 bewiesenen Theoreme:

$$F(xD_x) . A_m x^m = F(m) . A_m x^m,$$

das entsprechende Theorem:

$$F(x\triangle) . A_m(x)_m = F(m) . A_m(x)_m,$$

welches von Boole herrührt; allein den vorhergehenden, ganz elementaren Beweis desselben verdanken wir Graves. —

Beispiel.

Es ist:

$$x\Delta(x\Delta-1)(x\Delta-2)\ldots(x\Delta-n+1).(x)_m=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).(x)_m,$$

und als ein besonderer Fall hiervon:

$$x\Delta(x\Delta-1)(x\Delta-2)\ldots(x\Delta-n+1).(x)_n=1.2.3\ldots n.(x)_n,$$

wovon die analogen Formeln in Kap. 2 vorkommen. —

16. Das Theorem in der vorhergehenden Nr. läßt sich mit Vortheil zur Auflösung von Differenzengleichungen von der Form:

$$A(x\Delta)^\alpha.u_x+B(x\Delta)^\beta.u_x+\ldots+T.u_x=0$$

anwenden, weil die symbolischen Auflösungen derselben in der That die Form:

$$u_x=\frac{1}{F(x\Delta)}.0$$

haben. — Wenn die Wurzeln der Gleichung:

$$F(x\Delta)=0$$

alle reell und ungleich sind, so ist die gesuchte Auflösung:

$$u_x=C_a(x)_a+C_b(x)_b+\ldots+C_i(x)_i,$$

wo $a, b, \ldots i$ die ganzzahlig vorausgesetzten Werthe dieser Wurzeln und $C_a, C_b, \ldots$ willkürliche Constanten sind. —

Beispiel.

Wenn:

$$(x\Delta)^2.u_x-3(x\Delta).u_x+2.u_x=0,$$

die gegebene Differenzengleichung ist, so ist:

$$u_x=C_2(x)_2+C_1(x)_1.$$

17. Es läßt sich leicht zeigen, daß:

$$x\Delta(x\Delta-1)=x(x+1)\Delta^2=(x)_2\Delta^2,$$

$$x\Delta(x\Delta-1)(x\Delta-2)=x(x+1)(x+2)\Delta^3=(x)_3\Delta^3,$$

&c.,

und allgemein, daß:

$$x\triangle(x\angle - 1)\ldots(x\triangle - n + 1) = (x)_x\triangle^x$$

ist. —

18. Durch Anwendung dieses Gesetzes kann man leicht alle Differenzengleichungen von der Form:

$$A\,(x)_a\triangle^a \,.\, u_x + B(x)_\beta\triangle^\beta \,.\, u_x + \&c. + T \,.\, u_x = 0$$

auflösen, weil sie sich sofort auf die Form:

$$A'\,(x\triangle)^{a'} \,.\, u_x + B'\,(x\triangle)^{\beta'} \,.\, u_x + \&c. + T' \,.\, u_x = 0,$$

bringen lassen, deren Auflösung mithin nach der vorhergehenden Nr. gefunden werden kann. —

19. Hat man z. B. die Gleichung:

$$u_{x+1,y} - D_y \,.\, u_{x,y} = 0,$$

oder was offenbar dasselbe ist:

$$(e^{D_x} - {}'D_y) \,.\, u_{x,y} = 0,$$

so ist die Auflösung:

$$u_{x,y} = (D_y)^x \,.\, \varphi\,(y),$$

wo φ eine arbiträre Function ist. —

Ebenso ist von:

$$u_{x+1,y} - aD_y^n \,.\, u_{x,y} = 0$$

die Auflösung:

$$u_{x,y} = a^x(D_y)^{nx} \,.\, \varphi\,(y).$$

Wenn allgemeiner die Gleichung:

$$u_{x+n,y} + aD_y \,.\, u_{x+n-1,y} + bD_y^2 \,.\, u_{x+n-2,y} + \ldots + kD_y^n \,.\, u_{x,y} = 0$$

gegeben ist, so kann dieselbe auf die Form:

$$(e^{nD_x} + aD_y \,.\, e^{(n-1)D_x} + \ldots + kD_y^n) \,.\, n_{x,y} = 0$$

gebracht werden, und mithin ist die symbolische Auflösung von der Form:

$$u_{x,y} = (e^{D_x} - aD_y)^{-1} \cdot (e^{D_x} - \beta D_y)^{-1} \ldots (e^{D_x} - \varkappa D_y^{\nu})^{-1} \cdot 0,$$

oder:

$$u_{x,y} = a^x (D_y)^x \cdot \varphi_\alpha (y) + \beta^x (D_y)^x \cdot \varphi_\beta (y) + \text{\&c.},$$

wo $\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \ldots$ arbiträre Functionen sind. —

Hierbei ist bemerkenswerth: daß dieses Integrationsverfahren von der Natur der durch D_y angedeuteten Operation unabhängig ist — und dieselbe Form des Integrales gilt auch für:

$$u_{x+n,y} + a\Delta_y \cdot u_{x+n-1,y} + b\Delta_y^2 \cdot u_{x+n-2,y} + \ldots = 0,$$

oder für jede Gleichungsform, wo der Operator in dem zweiten Theile von anderer Art als e^{D_x} ist.

Anhang zu Kapitel 4 und 6.

1. Die zu integrirende Differentialgleichung sei:

$$xyD_xD_yz + bxD_xz + ayD_yz + abz = V,$$

wo V eine Function von x und y bedeutet; so kann dieselbe auf die Form:

$$(xD_x + a)(yD_y + b)z = V$$

gebracht werden, deren symbolische Auflösung sofort ist:

$$z = \frac{1}{(xD_x + a)(yD_y + b)} V + x^{-a} \Phi(y) + y^{-b} \Psi(x),$$

und wenn V von der Form:

$$\Sigma A_{m,n} x^m y^n$$

ist; so ist die wirkliche Auflösung:

$$z = \Sigma \frac{A_{m,n} x^m y^n}{(m+a)(n+b)} + x^{-a} \Phi(y) + y^{-b} \Psi(x).$$

Allgemeiner, die Auflösung der Differentialgleichung:

$$(xD_x + a)(yD_y + b)(zD_z + c) \ldots w = \Sigma A_{m,n,p,\&c.} x^m y^n z^p \ldots$$

ist:

$$w = \Sigma \frac{A_{m,n,p,\&c.} x^m y^n z^p \ldots}{(m+a)(n+b)(q+c)\ldots} + x^{-a} \Phi(y, z, \&c.) + y^{-b} \Psi(z, x\ \&c.) + \&c.$$

2. Die zu integrirende Gleichung sei:

$$D_x^2 z + \frac{2}{x} D_x z = a^2 D_y^2 z.$$

so ergibt sich, wenn man mit x^2 multiplicirt und reducirt:

$$xD_x(xD_x+1)\,z=a^2\,x^2D_y^2z,$$

oder:

$$D_x^2(xz)=a^2D_y^2(xz),$$

folglich:

$$z=\frac{1}{x}\{\Phi\,(y+ax)+\Psi\,(y-ax)\}.$$

3. Wenn die zu integrirende Gleichung folgende ist:

$$D_y^2z=a^2\left\{D_x^2z+\frac{2}{x}D_xz-\frac{2}{x^2}z\right\}.$$

so läßt sich dieselbe nach S. 52 offenbar auf die Form:

$$(xD_x-1)(xD_x+2)\,z-\left(\frac{x}{a}D_y\right)^2z=0$$

bringen, wovon die symbolische Auflösung ist:

$$z=\frac{1}{x^2}(xD_x-1)\,\{\Phi\,(x+ay)+\Psi\,(x-ay)\};$$

also die wirkliche:

$$z=\frac{1}{x}\{\Phi'\,(x+ay)+\Psi'\,(x-ay)\}-\frac{1}{x^2}\{\Phi(x+ay)+\Psi(x-ay)\}.$$

Obgleich das System gleichzeitiger Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}D_t^2u&=a^2D_x(D_xu+D_yv+D_zw)\\D_t^2v&=a^2D_y(D_xu+D_yv+D_zw)\\D_t^2w&=a^2D_z(D_xu+D_yv+D_zw),\end{aligned}\right\}$$

wodurch die kleinen Bewegungen homogener elastischer Flüssigkeiten ausgedrückt werden, sich im Allgemeinen **nicht** integriren läßt; so hat man für specielle Fälle doch particuläre Integrale gefunden. — In dem Falle **sphärischer Wellen** z. B., welche sich von dem Mittelpunkte (α,β,γ) aus und gegen denselben zu bewegen, wird diesen Gleichungen durch die Werthe:

$$u = \frac{x-\alpha}{r^3} \{ \Phi'(at - r) + \Psi'(at + r) \} + \frac{x-\alpha}{r^3} \{ \Phi(at-r) - \Psi(at+r) \}$$

$$v = \frac{y-\beta}{r^2} \{ \Phi'(at - r) + \Psi'(at + r) \} + \frac{y-\beta}{r^3} \{ \Phi(at-r) - \Psi(at+r) \}$$

$$w = \frac{z-\gamma}{r^2} \{ \Phi'(at - r) + \Psi'(at + r) \} + \frac{z-\gamma}{r^3} \{ \Phi(at-r) - \Psi(at+r) \}$$

genügt. — Für ebene Wellen, welche nach einer Richtung fortschreiten, die mit den Coordinatenaxen die Winkel λ, μ, ν macht, wird diesen Gleichungen offenbar durch die Ausdrücke:

$$u = \cos\lambda \,.\, \Phi(x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu - at)$$

$$v = \cos\mu \,.\, \Phi(x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu - at)$$

$$w = \cos\nu \,.\, \Phi(x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu - at)$$

genügt. —

Zusätze.

Die folgenden Anwendungen des Operationscalculs mögen für den ersten Anfänger hier noch angeführt werden:

1) Wenn u eine Function von zwei unabhängigen Veränderlichen x, y ist, so hat man:

$$Du = D_x u + D_y u,$$

$$D = D_x + D_y,$$

$$D^n = (D_x + D_y)^n,$$

$$D^n = D_x^n + n D_x^{n-1} D_y + \frac{n(n-1)}{1.2} D_x^{n-2} D_y^2 + \ldots + D_y^n$$

$$D^n u = D_x^n u + n D_x^{n-1} D_y u + \frac{n(n-1)}{1.2} D_x^{n-2} D_y^2 u + \ldots + D_y^n u.$$

Wenn u eine Function von drei independenten Veränderlichen x, y, z ist, so hat man ebenso:

$$Du = D_x u + D_y u + D_z u,$$

$$D^n u = (D_x + D_y + D_z)^n u,$$

u. s. f.

---

2) Von dem Taylor'schen Theoreme läßt sich mittelst des Operationscalculs eine bemerkenswerthe symbolische Form angeben, welche zu manchen Zwecken mit Vortheil benutzt werden kann. Es ist nämlich:

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)\,h + D^2 f(x)\frac{h^2}{1.2} + D^3 f(x)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$= \left(1 + Dh + \frac{(Dh)^2}{1.2} + \frac{(Dh)^3}{1.2\,3} + \ldots\right) f(x)$$

$$= e^{Dh} f(x),$$

d. h. wenn an $f(x)$ mit dem Symbole e^{Dh} operirt wird, so geht $f(x)$ in $f(x+h)$ über, und wenn man e^D mit E bezeichnet; so hat man:

$$f(x+h) = E^h f(x).$$

Vermittelst dieser letzten Form kann man leicht die Functionsgleichung:

$$f(x) f(h) = f(x+h)$$

auflösen; denn man hat:

$$f(x) f(h) = E^h f(x),$$

folglich:

$$f(h) = E^h,$$

und da $E = e^D$ von h unabhängig ist, so kann dasselbe in Beziehung auf h als constant betrachtet und mit a bezeichnet werden. Man hat also:

$$f(h) = a^h \quad \text{oder} \quad f(x) = a^x,$$

und es ist in der That:

$$f(x) f(h) = a^x \cdot a^h = a^{x+h} = f(x+h).$$

Ein ähnliches Verfahren kann bei andern Functionsgleichungen angewandt werden. —

---

3) Setzt man zur Abkürzung $f(x) = u$ und $f(x+h) = u + \triangle u$ so ist:

$$u + \triangle u = u + Du\frac{h}{1} + D^2 u \frac{h^2}{1.2} + D^3 u \frac{h^3}{1.2.3} + \cdots$$

$$1 + \triangle = 1 + \frac{Dh}{1} + \frac{(Dh)^2}{1.2} + \frac{(Dh)^3}{1.2.3} + \cdots = e^{Dh}.$$

Bezeichnet nun u eine Function $f(x, y)$ von zwei independenten Veränderlichen x, y und beziehen sich $\triangle', D'$ ebenso auf y, wie $\triangle, D$ auf x; so hat man, wenn k den Zuwachs von y bedeutet:

$$u + \Delta u + \Delta'(u + \Delta u) = u + \Delta u + D'(u + \Delta u)k + \ldots$$

oder:

$$(1 + \Delta')(1 + \Delta)u = e^{D'k}(e^{Dh}) = e^{Dh + D'k}u$$

$$= [1 + (Dh + D'k) + \tfrac{1}{2}(Dh + D'k)^2 + \ldots]u$$

$$= u + hDu + kD'u + \tfrac{1}{2}(h^2D^2u + 2hkDD'u + k^2D'^2u) + \ldots,$$

oder in andern Zeichen:

$$f(x + h, y + k) = f(x, y,) + \frac{df}{dx}h + \frac{df}{dy}k$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2f}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}hk + \frac{d^2f}{dy^2}\right) + \ldots$$

u. s. f.

---

4) Aus $1 + \Delta = e^{Dh}$ folgt: $Dh = \log(1 + \Delta)$, also:

$$hDu = h\frac{du}{dx} = \log(1 + \Delta)u$$

$$= \Delta u - \tfrac{1}{2}\Delta^2u + \tfrac{1}{3}\Delta^2u - \tfrac{1}{4}\Delta^4u + \ldots$$

Von der Richtigkeit dieser Gleichung überzeugt man sich leicht. —

---

5) Wegen $e^D = E$ ist:

$$E^{nh}f(x) = f(x + nh).$$

Nun ist aber auch:

$$E^{nh} - 1 = \frac{E^{nh} - 1}{E^h - 1}(E^h - 1) = \frac{E^{nh} - 1}{E^h - 1}(e^{hD} - 1)$$

$$= \frac{E^{nh} - 1}{E^h - 1}\left[hD + \frac{h^2}{1.2}D^2 + \frac{h^3}{1.2.3}D^3 + \ldots\right];$$

folglich:

$$(E^{nh}-1)f(x)=f(x+nh)-f(x)$$

$$=\frac{E^{nh}-1}{E^{h}-1}\left[hD+\frac{h^2}{1.2}D^2+\frac{h^3}{1.2.3}D^3+\ldots\right]f(x)$$

$$=\frac{E^{nh}-1}{E^{h}-1}\left[hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots\right].$$

Bemerkt man nun, daß:

$$\frac{E^{nh}-1}{E^{h}-1}=E^{(n-1)h}+E^{(n-2)h}+E^{(n-3)h}+\ldots+1$$

ist, nimmt die letzte Gliederreihe in umgekehrter Folge, und verrichtet die angezeigten Operationen; so erhält man die bekannte Formel:

$$\int_x^{x+nh}f'(x)\,dx=f(x+nh)-f(x)$$

$$=h\,[f'(x)+f'(x+h)+\ldots+f'(x+(n-1)h)]$$

$$+\frac{h^2}{1.2}[f''(x)+f''(x+h)+\ldots+f''(x+(n-1)h)]$$

$$+\text{\&c.}+\text{\&c.}$$

---

6) Wenn man in der bekannten Formel:

$$\frac{\pi}{4}\theta=\sin\theta-\frac{1}{3^2}\sin 3\theta+\frac{1}{5^2}\sin 5\theta-\ldots.$$

für die Sinusse Exponentialgrößen, und hD für $\theta\sqrt{-1}$ setzt, so erhält man:

$$\frac{\pi}{2}hD=e^{hD}-e^{-hD}\frac{1}{3^2}(e^{3hD}-e^{-3hD})+\ldots;$$

folglich:

$$\frac{\pi}{2}h\,.\,Df(x)=f(x+h)-f(x-h)$$

$$-\frac{1}{3^2}[f(x+3h)-f(x-3h)]$$

$$+\text{\&c.}$$

Ebenso ergibt sich aus der Formel:

$$\frac{1}{2} = \cos\theta - \cos 2\theta + \cos 3\theta - \ldots$$

das Theorem:

$$f(x) = f(x+h) - f(x+2h) + f(x+3h) - \ldots$$
$$+ f(x-h) - f(x-2h) + f(x-3h) - \ldots$$

sowie aus:

$$\frac{\theta}{2} = \sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta - \ldots$$

das Theorem:

$$hD\,f(x) = f(x+h) - \tfrac{1}{2}f(x+2h) + \tfrac{1}{3}f(x+3h) - \ldots$$
$$- [f(x-h) - \tfrac{1}{2}f(x-2h) + \tfrac{1}{3}f(x-3h) - \ldots$$

---

7) Aus $D.f(x)\,e^x = e^x f(x) + e^x D.f(x) = e^x(1+D)f(x)$ folgt: $D^n.f(x)\,e^x = (1+D)^n f(x)$.

Setzt man hierin $n = -1$, so erhält man:

$$D^{-1} f(x)\,e^x = \int f(x)\,e^x\,dx = e^x\,(1+D)^{-1} f(x)$$
$$= e^x\,(1 - D + D^2 - D^3 + \ldots) f(x)$$
$$= e^x\,(f(x) - Df(x) + D^2 f(x) \ldots)$$
$$= e^x\,(f(x) - f'(x) + f''(x) - \ldots),$$

wie sich bekanntlich auch durch theilweise Integration leicht ergibt.

---

8) Wenn man in der Leibniz'schen Formel für $\frac{d^n.uv}{dx^n} = D^n uv$ in Kap. 2 Nr. 6 den Index n negativ annimmt, so hat man:

$$\int^n uv\,dx^n = u\int^n v\,dx^n - n\frac{du}{dx}\int^{n+1} v\,dx^{n+1}$$

$$+\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}\int^{n+2} v\,dx^{n+2} + \ldots,$$

und für $n = 1$:

$$\int uv\,dx = u\int v\,dx - \frac{du}{dx}\int^2 v\,dx^2 + \frac{d^2u}{dx^2}\int^3 v\,dx^3 - \ldots.$$

Für $v = 1$ gibt diese letzte Gleichheit:

$$\int u\,dx = u\int dx - \frac{du}{dx}\int^2 dx^2 + \frac{d^2u}{dx^2}\int^3 dx^3 - \ldots$$

$$= ux - \frac{du}{dx}\cdot\frac{x^2}{1.2} + \frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{x^3}{1.2.3} - \ldots$$

d. h. die Bernoulli'sche Formel. —

Wenn man $v = e^{ax}$ setzt, so wird:

$$\frac{d^n.ue^{ax}}{dx^n} = e^{ax}\frac{d^n u}{dx^n} + nae^{ax}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}a^2e^{ax}\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \ldots$$

$$= e^{ax}\left[\frac{d^n}{dx^n} + na\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}a^2\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \ldots\right]u,$$

also:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n ue^{ax} = e^{ax}\left(\frac{d}{dx} + a\right)^n u,$$

und:

$$\left(\frac{d}{dx} + a\right)^n u = e^{-ax}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{ax}u,$$

oder:

$$(D + a)^n u = e^{-ax} D^n . e^{ax} u;$$

folglich für $n = -1$:

$$\left(\frac{d}{dx} + a\right)^{-1} u = e^{-ax}\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} e^{ax}u$$

$$= e^{-ax}\int e^{ax}u\,dx;$$

und:

$$\left(\frac{d}{dx} - a\right)^{-1} u = e^{ax} \int e^{-ax} u dx.$$

---

9) Aus:

$$\frac{d^n \sin(mx + a)}{dx^n} = m^n \sin\left(mx + a + n\frac{\pi}{2}\right)$$

folgt sofort:

$$\int^n \sin(mx + a)\, dx^n = \frac{1}{m^n} \sin\left(mx + a - n\frac{\pi}{2}\right),$$

und für $n = 1$:

$$\int \sin(mx + a)\, dx = \frac{1}{m} \sin\left(mx + a - \frac{\pi}{2}\right).$$

Ebenso hat man:

$$\int^n \cos mx\, dx^n = \frac{1}{m^n} \cos\left(mx - n\,.\,\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\int \cos mx\, dx = \frac{1}{m} \cos\left(mx - \frac{\pi}{2}\right).$$

Aus:

$$\frac{d^n (e^{ax} \sin mx)}{dx^n} = (a^2 + m^2)^{\frac{n}{2}}\; e^{ax} \sin(mx + n\varphi),$$

wo $\varphi = arctang\left(\frac{m}{a}\right)$ ist, folgt:

$$\int^n e^{ax} \sin mx\, dx^n = \frac{e^{ax} \sin(mx - n\varphi)}{(x^2 + m^2)^{\frac{n}{2}}}$$

$$\int e^{ax} \sin mx\, dx = \frac{e^{ax} \sin(mx - \varphi)}{(a^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

---

10) Vermittelst des Operationscalculs läßt sich auch leicht der allgemeine Ausdruck von $\Delta^n (u_x\,.\,v_x)$ finden. Denn wenn sich das

Zeichen Δ nur auf u_x und Δ' sich blos auf v_x bezieht, aber beide Zeichen dieselbe gewöhnliche Bedeutung haben; so ist:

$$\Delta (u_x v_x) = v_x \Delta u_x + u_x \Delta' v_x + \Delta u_x \Delta' v_x$$
$$= (\Delta + \Delta' + \Delta\Delta') u_x v_x;$$

folglich:

$$\Delta^2 (u_x v_x) = (\Delta + \Delta' + \Delta\Delta') \Delta u_x v_x$$
$$= (\Delta + \Delta' + \Delta\Delta')^2 u_x v_x,$$

und allgemein:

$$\Delta^n (u_x v_x) = (\Delta + \Delta' + \Delta\Delta')^n u_x v_x$$
$$= (\Delta + \Delta' (1 + \Delta))^n u_x v_x$$

$$= \left[\Delta^n + n\Delta^{n-1}\Delta'(1+\Delta) + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^{n-2}\Delta'^2(1+\Delta)^2 + \ldots\right] u_x v_x.$$

Nun ist aber: $\quad (1+\Delta)^m u_x = u_{x+m},$

also: $\quad \Delta^{n-m}(1+\Delta)^m u_x = \Delta^{n-m} u_{x+m},$

und folglich: $\quad \Delta^n (u_x . v_x) = v_x \Delta^n u_x + n\Delta^{n-1} u_x \Delta v_x$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^{n-2} u_{x+2} . \Delta^2 v_x + \ldots$$

---

11) Wenn $u_{x;y}$ eine Function der beiden independenten Veränderlichen x, y ist, so ergibt sich leicht:

$$\Delta u_{x,y} = \Delta_x u_{x,y} + \Delta_y u_{x,y} + \Delta_x \Delta_y u_{x,y}$$
$$= [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) - 1] u_{x,y}.$$

Aus $\Delta u_{x,y}$ ergibt sich aber $\Delta^2 u_{x,y}$, wenn Δu an die Stelle von u gesetzt wird, nämlich:

$$\Delta^2 u_{x,y} = \Delta_x \Delta u_{x,y} + \Delta_y \Delta u_{x,y} + \Delta_y \Delta_x \Delta u_{x,y}$$
$$= (\Delta_x + \Delta_y + \Delta_y \Delta_x) \Delta u_{x,y}$$
$$= [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) - 1] \Delta u_{x,y}$$
$$= [(1 + \Delta_x)(1 + \Delta_y) - 1]^2 u_{x,y},$$

und allgemein:

$$\Delta^n u_{x,y} = [(1+\Delta_x)(1+\Delta_y) - 1]^n u_{x,y}.$$

Wenn $u_{x,y,z}\ldots$ eine Function von beliebig vielen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ ist, so ergibt sich auf ähnliche Weise leicht:

$$\Delta u_{x,y,z}\ldots = [(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)\ldots - 1]^n u_{x,y,z}\ldots$$

Setzt man für $1+\Delta_x$, $1+\Delta_y$, $1+\Delta_z, \ldots$ resp. die Symbole:

$$e^{D_x},\ e^{D_y},\ e^{D_z}, \ldots,$$

o hat man auch:

$$\Delta^n . u_{x,y} = (e^{D_x+D_y} - 1)^n u_{x,y}.$$

$$\Delta^n u_{x,y,z} = (e^{D_x+D_y+D_z} - 1)^n u_{x,y,z},$$

. . . .

. . . .

$$\Delta^n . u_{x,y,z}\ldots = (e^{D_x+D_y+D_z+\cdots} - 1)^n u_{x,y,z}\ldots$$

Druck der Hofbuchdruckerei von Eduard Krampe in Braunschweig.

Antikritik.

Herr Dr **Witzschel** hat in der **Zeitschrift für Mathematik und Physik** Jahrg. 2 Heft 1 eine Beurtheilung meiner **freien Bearbeitung** (d. h **nicht wörtlichen Uebersetzung**) des **Wesentlichsten** von Chasles: Traité. de Géometrie Supérieure veröffentlicht, die mich zu den folgenden Gegenbemerkungen veranlaßt:

1) Was die **einstweiligen Hinweglassungen** betrifft, so sind sie durch den Zweck der deutschen Ausgabe: zunächst nur das **Wesentlichste** in der **einfachsten Form** — und zu dem **billigsten** Preise zu liefern — bedingt. — Es ist deshalb die weitläufige Préface und der Discours d'inauguration du Cours de Géométrie Supérieure de la Faculté des Siences de Paris — worin sich der Verf. über die **Tentenz** seines Werkes, sowie über **Geschichtliches** ausspricht — hinweggelassen, weil ich keine **Geschichte** der Geometrie — und noch dazu eine **unvollständige** — liefern wollte. — Ferner habe ich die Résolution d'un Système d'équations etc. — sowie die Décomposition des fractions rationelles en fractions simples hinweggelassen, weil diese Gegenstände offenbar nicht in ein Lehrbuch der **neuern Geometrie** gehören. — Aus demselben Grunde habe ich von Allem, was mehr in die **analytische** Geometrie gehört: Équations à la droite — équations au Point — systèmes de coordonnées, etc. nur das beibehalten, was für die **allgemeine Theorie der Transformationsmethoden** (Homographie oder Collineation, ꝛc.) unumgänglich nothwendig war — und von diesen Methoden selbst habe ich wieder nur das **Wesentlichste** beibehalten — und alles Andere, wie die **analytischen Ausdrücke** derselben ꝛc. sowie einige Bruchstücke in Bezug auf **Kegelschnitte**, ꝛc. vorläufig hinweggelassen, theils weil dies nicht hieher gehört — doch nicht vollständig ist — und besonders, weil der Verf. von diesen **Transformationsmethoden** keine specielle Anwendung macht, und, wie er ausdrücklich bemerkt: auch später keine Anwendung davon machen — sondern soviel als möglich **direkte** Beweise vorziehen wird — worin eben das **Eigenthümliche** seiner Behandlungweise der **neuern** Geometrie besteht — so daß es gewissermaßen eine Inconsequenz ist, wenn er dennoch auf diese Transformationsmethoden und **einige Anwendungen** derselben näher eingeht. — Endlich habe ich das Kapitel über **imaginäre** Kreise vorläufig hinweggelassen, weil dasselbe sehr mangelhaft ist — was nicht anders zu erwarten war, da der Verf. von den interpretations que l'on a parfois cherché à donner des **imaginaires** en Géométrie nichts wissen will. — Er sagt ausdrücklich: Il n'y a point, bien entendu, de cercle **imaginaire**; et ce mot n'est q'une **fiction**, etc. — stellt aber dennoch den Halbmesser des **imaginären** Kreises **normal** auf die Ebene der Figur — wie es nach der **Gauß'schen** Theorie des **Imaginären** sein muß ꝛc. — Das folgende Kap. 34, welches die Anwendung der Eigenschaften des **imaginären** Kreises aux propriétés des cônes à base circulaire enthält, mußte daher von selbst vorläufig wegfallen, was um so mehr geschehen konnte, da dieser Gegenstand **vollständig** erst **nach** der Theorie der **Kegel-**

schnitte behandelt werden kann — wie der Verf. selbst bemerkt. — Daß elliptische Functionen nicht in ein Lehrbuch der Elemente der neuern Geometrie gehören, versteht sich doch von selbst. —

2) Was Herr Witzschel hinsichtlich des Zeichenprincipes gegen Chasles vorbringt, ist ebenso unbegründet, als abgeschmackt — denn Chasles selbst sagt ja: „Cependant dans l'ouvrage de M. Möbius, intitulé Calcul barycentrique, le premier, je crois, ou l'on ait donné des signes à ces deux relations,“ etc. — Man sollte meinen es handelte sich hier um die größte mathematische Entdeckung — solche Weitläufigkeiten macht Herr Witzschel hier, um Herrn Möbius die erste Anwendung der Zeichen +, — in der neuern Geometrie zu vindiciren! — Bei dieser Gelegenheit erfährt man auch: daß jeder deutsche Originalschriftsteller die Arbeiten des „gebildeten“ Auslandes, also namentlich Frankreichs und Englands, berücksichtige — und in Fragen der Priorität selbst respectire! — Also Italien, Rußland, Holland, Belgien, 2c. sind nach Herrn Witzschel das „ungebildete“ Ausland — welches keine Originalschriftsteller hat, die der deutsche Originalschriftsteller zu beachten hat! — Es wäre interessant zu wissen, ob sich Herr Witzschel auch zu den deutschen Originalschriftstellern zählt? — Was die Kenntniß der mathematischen Literatur — selbst des „ungebildeten“ Auslandes — betrifft; so möchte Herr Witzschel gegen Chasles wohl etwas zurückstehen! — Auch die Herren Tortolini, Brioschi, Flauti, Ostrogradsky, Lobatto, u. s. w. möchten sich hinsichtlich ihrer mathematischen Bildung mit Herrn Witzschel messen können — obgleich sie nach ihm dem ungebildeten Auslande angehören. — Uebrigens glaube ich noch nicht einmal, daß Herr Witzschel alle Arbeiten der Franzosen und Engländer auf dem Gebiete der Mathematik kennt, um sie bei seinen Originalarbeiten zu berücksichtigen. — Daraus, daß Chasles Geschichte der Geometrie selbst in Deutschland eine größere Verbreitung und allgemeinere Anerkennung gefunden hat, als der barycentrische Calcul von Möbius schließt Herr Witzschel: Es sei das Schicksal deutscher Geistesproducte, daß ihnen in der Regel erst dann allgemeinere Aufmerksamkeit zu Theil werde, wenn sie mit französischer oder englischer Enveloppe als etwas Neues offerirt würden! —

Bei gewöhnlichen Handelsproducten mag dies wohl vorkommen — allein bei mathematischen Geistesproducten möchten solcher Fälle doch nicht gar viele sein! — Auch muß man nicht vergessen: daß dieselbe mathematische Endeckung — wenn von einer solchen hier überhaupt die Rede sein könnte — auch im Auslande — und sogar in dem ungebildeten Auslande — unabhängig, von der deutschen Erfindung gemacht sein kann! — Ich kenne nichts Abgeschmackteres, als diese Art von Patriotismus und Nationaleifersucht auf wissenschaftlichem Gebiete! —

3) Nicht minder unbegründet sind die Einwürfe, welche Herr Witzschel gegen die von Chasles eingeführte Benennung: „anharmonisches Verhältniß“ macht, um dafür die Benennung: Doppelschnittsverhältniß oder Doppelverhältniß anzupreisen. — Herr Witzschel sagt wörtlich: „Da die Benennung „Doppelverhältniß“ ebenso kurz, wie bezeichnend und klar ist, dagegen mit der negativen Bezeichnung „anharmonisch“ überhaupt jedes Verhältniß bezeichnet werden kann, das eben kein harmonisches ist, so dürfte wohl schon in diesem Betracht, und abgesehen von einer gewissen historischen Berechtigung (?) das „Doppelverhältniß“ vor dem „anharmonischen“ Verhältniß den Vorzug verdienen (?) trotzdem, daß bereits manche Geometer

den letzten Namen ohne Weiteres angenommen haben." — Es ist hier nur von Doppelverhältnissen — und nicht von arithmetischen, geometrischen, oder gar noch andern Verhältnissen die Rede — und diese Doppelverhältnisse von 4 verschiedenen Punkten, oder Geraden sollen eben in zwei Hauptabtheilungen unterschieden werden, wovon die eine Abtheilung die umfaßt, deren Werth = — 1 ist, und die andere die, deren Werth nicht = — 1 ist. — Wenn nun die Verhältnisse der ersten Abtheilung harmonische genannt werden — wie es schon lange üblich ist — so folgt von selbst: daß die der zweiten Abtheilung mit der allerdings negativen Benennung „anharmonisch" bezeichnet werden müssen! — Aber die beiden Namen: Doppelverhältniß und harmonisches Verhältniß zu einer solchen Unterscheidung anwenden zu wollen, ist ungereimt, eben weil das harmonische Verhältniß auch ein Doppelverhältniß ist! —

4) Noch entschiedener muß ich die Belehrungen des Herrn Witzschel hinsichtlich des Imaginären zurückweisen, die nichts als leere, unbegründete, hochfahrende Phrasen sind. — Ich kenne die Theorie des Imaginären nach allen ihren bisherigen Bearbeitungen, auch die von Möbius, allermindestens eben so gut, wo nicht genauer, wie Herr Witzschel; aber dennoch habe ich mich nicht entschließen können, mehr als die „kurzen Bemerkungen" unter dem Texte davon hinzuzufügen, weil der Chasles'schen Darstellung weiter nichts fehlt, als eine einfache Nachweisung der geometrischen Bedeutung der imaginären Ausdrücke — und es sind deshalb diese „kurzen Bemerkungen" mehr als hinreichend für den Zweck, welchen ich im Auge hatte. — Auch halte ich die meisten geometrischen Anwendungen des Imaginären, wie solche in neuster Zeit im Uebermaß zum Vorschein gekommen sind, und wobei man gleich vom Imaginären ausgeht, für abusive — abgesehen davon, daß sich in diesen Darstellungen manches geradezu Unrichtige vorfindet — wie ich bei Gelegenheit der Besprechung der neuesten Schrift über diesen Gegenstand von Riecke: Die Rechnung mit Richtungszahlen, rc. gezeigt habe (Vergl. Heidelberger Jahrbücher der Literatur von 1857. S. 527—536.) — Während man auf der einen Seite hinsichtlich des Imaginären allzu ängstlich war, ist man auf der andern Seite wieder viel zu weit gegangen. — Ich habe an dem angeführten Orte den eigentlichen Zweck und Gegenstand dieser Lehre dahin angegeben: „Wenn bei Untersuchungen über reelle Größen (Punkte, Linien rc.) unter gewissen Voraussetzungen die analytischen Ausdrücke derselben imaginär werden, zu wissen, welche objective (geometrische) Bedeutung diese imaginären Ausdrücke haben, d. h. welche Lage die betreffenden Punkte, Linien rc. haben —" und zugleich habe ich gezeigt: weshalb es keines neuen Zeichens außer $i = \sqrt{-1}$ bedarf, wenn man aus der Ebene in den Raum übergehen muß. —

Es klingt sonderbar, wenn Herr Witzschel hinsichtlich des Imaginären einerseits eine der Chasles'schen Darstellung mehr angemessene (?) Ergänzung rc. von mir verlangt — und andererseits in der geometrischen Deutung des Imaginären doch nur eine „gewisse Befriedigung" — keine mathematische Nothwendigkeit — erblickt! — Worin diese größere Angemessenheit, rc. bestehen soll, hat Hert Witzschel leider mit keinem Worte näher angedeutet — das ganze Gerade besteht, wie gesagt, nur in hochfahrenden allgemeinen Phrasen! — Ob Herr Witzschel meiner Arbeit den Namen „Uebersetzung" oder „freie Bearbeitung" beilegt, das ist an sich ganz gleichgültig — daß sie keine wörtliche Uebersetzung

ist, davon kann man sich leicht überzeugen. — Ich meinerseits habe gegen die Titel „Uebersetzung" und „Uebersetzer" um so weniger etwas zu erinnern, als die Herausgeber der Zeitschrift ꝛc. sowohl in dieser, als außerdem „Uebersetzungen" liefern — sich also dieselben Titel gefallen lassen müssen! —

Indessen gesteht Herr Witzschel meiner „Uebersetzung" schließlich doch das Verdienst zu: „in wohlfeiler Ausgabe das höchst schätzbare Werk von Chasles seinem wesentlichsten Inhalte nach dem deutschen Publikum zugänglich gemacht zu haben" — und somit wäre also mein Zweck vollständig erreicht. — Bemerken muß ich hier aber noch: daß Herr Witzschel über das Chasles'sche Werk und meine „Uebersetzung" desselben Herrn Buchhändler B. G. Teubner in Leipzig, welchem ich den Verlag der letztern antrug, ein Privatgutachten abgestattet hat, das mich förmlich indignirte, und wogegen die besprochene Recension in der Zeitschrift ꝛc. noch als sehr günstig erscheint. — Unter andern behauptet Herr Witzschel darin: die Géométrie Supérieure stehe noch sehr weit gegen den barycentrischen Calcul zurück — woraus Chasles noch sehr Vieles hätte lernen können — das Doppelschnittsverhältniß verdiene vor dem anharmonischen den Vorzug — die Géométrie Supérieure brauche nicht deutsch herausgegeben zu werden, weil jeder Deutsche Französisch verstehe — und die deutschen Originalschriftsteller Möbius, Staudt, ꝛc. weit Vorzüglicheres geleistet hätten, als Chasles, ꝛc. — Kurz die Anmaßung und Nationaleifersucht des Herrn Witzschel spricht sich hier auf eine ebenso lächerliche, als unschickliche und unwahre Weise aus; denn man müßte ganz bornirt, oder verblendet sein, wenn man den wesentlichen Fortschritt verkennen, oder leugnen wollte, welchen die Darstellung der neuern Geometrie durch die Chasles'sche Arbeit gemacht hat. — Vor der Oeffentlichkeit hat es Herr Witzschel doch nicht gewagt, das fragliche Werk in gleicher Weise herabzusetzen — weshalb seine Recension über dasselbe Werk viel günstiger ausgefallen ist, als das Privaturtheil! —

5) Was Herr Witzschel endlich hinsichtlich der Druckfehler sagt, ist ebenso irrelevant, als seine übrigen Ausstellungen. — Diese Druckfehler sind an sich so unbedeutend, daß sie dem nur einigermaßen aufmerksamen Leser selbst ohne specielle Angabe sofort in die Augen fallen. — Daß zwei Figuren zu §. 274 und §. 277 verwechselt sind, habe ich gleich nach Empfang der betreffenden Aushängebogen gesehen und solches dem Setzer auf dem folgenden Correcturbogen bemerkt, wovon sich Herr Witzschel überzeugen kann, wenn er sich die Correcturbogen ansehen will. — Ich habe es jedoch nicht einmal für nöthig gehalten, dies speciell zu bemerken — und noch weniger: die betreffenden Bogen umdrucken zu lassen — wie Herr Witzschel wünscht, weil selbst ein Anfänger von den nur um eine Seite von einander getrennten 4 Figuren nach den Angaben im Texte leicht die betreffende Figur herausfindet — und die fraglichen §.§. selbst ohne alle Figuren verstehen würde — indem er sich selbst die Figuren nach dem Texte leicht zeichnete.

Schließlich diene dem math. Publikum zur Nachricht: daß ihm von dem in Rede stehenden klassischen Werke in der vollendeten „Uebersetzung" nichts entgehen soll, was wirklich von Werth ist, obgleich ich es in dem ersten Theile einstweilen hinweggelassen habe. —

Heidelberg, Dr. Schnuse.
im Juli 1857.